

Übungen zu „Formale Methoden“

Aufgabe 1 Iterative Fixpunktbestimmung [LÖSUNG]

- (a) Fixpunktiteration beginnend beim kleinsten Element $(\{\}, \{\}, \{\}, \{\}, \{\}, \{\})$ (gemäß der gegebenen, elementweisen Ordnung) liefert den kleinsten Fixpunkt:

$$f \begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \{a, b, c\} \\ \emptyset \\ \{c\} \end{pmatrix} \rightsquigarrow f \begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \{a, b, c\} \\ \emptyset \\ \{c\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{a, b, c\} \\ \emptyset \\ \{a, b, c\} \\ \{a, b, c\} \\ \emptyset \\ \{c\} \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow f \begin{pmatrix} \{a, b, c\} \\ \emptyset \\ \{a, b, c\} \\ \{a, b, c\} \\ \emptyset \\ \{c\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{a, b, c\} \\ \{a, b\} \\ \{a, b, c\} \\ \{a, b, c\} \\ \emptyset \\ \{c\} \end{pmatrix}$$

Da $f \begin{pmatrix} \{a, b, c\} \\ \{a, b\} \\ \{a, b, c\} \\ \{a, b, c\} \\ \emptyset \\ \{c\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{a, b, c\} \\ \{a, b\} \\ \{a, b, c\} \\ \{a, b, c\} \\ \emptyset \\ \{c\} \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} \{a, b, c\} \\ \{a, b\} \\ \{a, b, c\} \\ \{a, b, c\} \\ \emptyset \\ \{c\} \end{pmatrix}$ (kleinster) Fixpunkt.

- (b) Die Existenz eines kleinsten Fixpunktes ist dadurch gesichert, dass die Funktion f monoton ist und die angegebene Ordnung über U eine (ketten-) vollständige Halbordnung darstellt. Für die Bestimmung des kleinsten Fixpunktes mittels obigem Verfahren ist zusätzlich die Stetigkeit der Funktion f notwendig. Nur dann ist das nach obigem Verfahren berechnete $\sup\{f^n(\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset) \mid n \geq 0\}$ auch wirklich der kleinste Fixpunkt ist.

Aufgabe 2 Anweisungsorientiertes Programm [LÖSUNG]

Seien tr und se ein Baum bzw. eine Sequenz, dann liefert das folgende Programm die Summe k der Knoten des Baumes tr und der Knoten der Bäume in der Sequenz se .

$k, t, s := 0, tr, se;$

```
do ( $t \neq \text{etree} \vee s \neq \langle \rangle$ ) then
  if  $t = \text{etree}$  then  $t, s := \text{first}(s), \text{rest}(s)$ 
     $\square$   $t \neq \text{etree}$  then  $k, t, s := k + \text{root}(t), \text{left}(t), s \circ \langle \text{right}(t) \rangle$ 
  fi
od
```