

## Übungen zu „Formale Methoden“

### Aufgabe 1 Sequentielle Erweiterung

Wir betrachten flach geordnete Sorten  $A^\perp = A \cup \{\perp\}$  mit kleinstem Element  $\perp$ . Eine Funktion  $f : A \times A \rightarrow B$  heißt linkssequentiell, wenn  $f$  konstant ist oder  $f(\perp, x) = \perp$  und  $f(a, x)$  eine linkssequentielle Funktion ist, für jedes  $a \in A$ . Rechtssequentielle und allgemein sequentielle Funktionen sind entsprechend definiert.

- (a) Erweitern Sie die durch  $(a \leq b) := (\neg a \vee b)$  auf  $Bool$  definierte Funktion zu einer nichtstrikten sequentiellen Funktion.
- (b) Welche Monotoniebeziehung gilt zwischen den Funktionen?
- (c) Lassen sich auf  $Bool$  die Funktionen  $<$ ,  $=$  und  $\vee$  derart sequentiell erweitern, dass  $(a \leq b) = ((a < b) \vee (a = b))$  auf  $Bool^\perp$  gilt?

### Aufgabe 2 Monotone, nicht-stetige Funktion

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$  bezeichnet die Potenzmenge von  $\mathbb{N}$ , d.h. die Menge der Mengen natürlicher Zahlen. Auf  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  ist die folgende Ordnung  $\leq$  definiert:  $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}). A \leq B \iff A \subseteq B$ . Sei außerdem die Funktion  $f$  definiert als  $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$  mit  $f(A) = \{42\}$ , falls  $A$  endlich ist und  $f(A) = \mathbb{N}$  sonst. Zeigen Sie, dass  $f$  bzgl.  $\leq$  monoton, aber nicht stetig ist!

### Aufgabe 3 (Hausaufgabe) Eigenschaften von Funktionen

(4 Punkte; Abgabe bis spätestens 04.12.2006 zu Beginn der Übung.)

Gegeben sei die Funktion  $foo : M^\perp \times M^\perp \rightarrow M^\perp$  über der Menge  $M^\perp = \{a, b\} \cup \{\perp\}$ , mit:

$$foo(x, y) = \begin{cases} b & \text{falls } (x = \perp) \wedge (y = \perp) \\ \perp & \text{falls } ((x = \perp) \vee (y = \perp)) \wedge \neg((x = \perp) \wedge (y = \perp)) \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

Weiterhin sei die Menge  $M^\perp$  flach geordnet, mit dem universalen Fehlerelement  $\perp$  als kleinstem Element.

- (a) Ist die Funktion  $foo$  **strikt**? Begründen Sie Ihre Antwort.

- (b) Ist die Funktion *foo* **monoton**? Begründen Sie ebenfalls Ihre Antwort.
- (c) Nachfolgend sei die Funktion  $bar : M^\perp \times M^\perp \rightarrow M^\perp$  bereits teilweise in Form einer Wertetabelle gegeben. Weiterhin gelte:  $a \sqsubseteq b$ . Ergänzen Sie die fehlenden Einträge in der Wertetabelle, so dass *bar* sowohl strikt als auch monoton wird.

<i>bar</i>	$\perp$	<i>a</i>	<i>b</i>
$\perp$			
<i>a</i>	$\perp$	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>b</i>			