Technische Universität München **WS 2006/07**
Institut für Informatik
Prof. Manfred Broy **27. November 2006**
A. Gruler, B. Spanfelner **Übungsblatt 5**

Übungen zu „Formale Methoden“

Aufgabe 1 Sequentielle Erweiterung

Wir betrachten flach geordnete Sorten $A^{\perp} = A \cup \{\perp\}$ mit kleinstem Element $\perp$. Eine Funktion $f : A \times A \to B$ heißt linkssequentiell, wenn f konstant ist oder $f(\perp, x) = \perp$ und $f(a, x)$ eine linkssequentielle Funktion ist, für jedes $a \in A$. Rechtssequentielle und allgemein sequentielle Funktionen sind entsprechend definiert.

(a) Erweitern Sie die durch $(a \leq b) := (\neg a \vee b)$ auf *Bool* definierte Funktion zu einer nichtstrikten sequentiellen Funktion.

(b) Welche Monotoniebeziehung gilt zwischen den Funktionen?

(c) Lassen sich auf *Bool* die Funktionen $<$, $=$ und $\vee$ derart sequentiell erweitern, dass $(a \leq b) = ((a < b) \vee (a = b))$ auf $Bool^{\perp}$ gilt?

Aufgabe 2 Monotone, nicht-stetige Funktion

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ bezeichnet die Potenzmenge von $\mathbb{N}$, d.h. die Menge der Mengen natürlicher Zahlen. Auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist die folgende Ordnung $\leq$ definiert: $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}). A \leq B \iff A \subseteq B$. Sei außerdem die Funktion f definiert als $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit $f(A) = \{42\}$, falls A endlich ist und $f(A) = \mathbb{N}$ sonst. Zeigen Sie, dass f bzgl. $\leq$ monoton, aber nicht stetig ist!

Aufgabe 3 (Hausaufgabe) Eigenschaften von Funktionen

(4 Punkte; Abgabe bis spätestens 04.12.2006 zu Beginn der Übung.)

Gegeben sei die Funktion $foo : M^{\perp} \times M^{\perp} \to M^{\perp}$ über der Menge $M^{\perp} = \{a, b\} \cup \{\perp\}$, mit:

$$foo(x,y) = \begin{cases} b & \text{falls} \quad (x = \perp) \;\wedge\; (y = \perp) \\ \perp & \text{falls} \quad \big((x = \perp) \vee (y = \perp)\big) \;\wedge\; \neg\big((x = \perp) \wedge (y = \perp)\big) \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

Weiterhin sei die Menge $M^{\perp}$ flach geordnet, mit dem universalen Fehlerelement $\perp$ als kleinstem Element.

(a) Ist die Funktion foo **strikt**? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Ist die Funktion foo **monoton**? Begründen Sie ebenfalls Ihre Antwort.

(c) Nachfolgend sei die Funktion $bar : M^\perp \times M^\perp \to M^\perp$ bereits teilweise in Form einer Wertetabelle gegeben. Weiterhin gelte: $a \sqsubseteq b$. Ergänzen Sie die fehlenden Einträge in der Wertetabelle, so dass bar sowohl strikt als auch monoton wird.

bar	$\perp$	a	b
$\perp$			
a	$\perp$	a	b
b			