

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Informatik IV

Aufgabe 28 **Entscheidbarkeit**

- (a) Gegeben seien zwei entscheidbare Prädikate $p(x, y)$ und $q(x, y)$. Ist das Prädikat $r(x, y) = p(x, y) \wedge q(x, y)$ entscheidbar.
- (b) Ist die transitive Hülle eines entscheidbaren Prädikates $p(x, y)$ entscheidbar?
- (c) TM sei eine nichtdeterministische Turingmaschine, die genau die Sprache L akzeptiere; weiterhin gäbe es eine berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ so, dass für jedes Wort $w \in L$ eine akzeptierende Berechnung in TM der Länge $\leq f(|w|)$ existiere. Geben Sie ein Entscheidungsverfahren für L an.

Aufgabe 29 **Turingmaschine, Nichtdeterminismus vs. Determinismus**

Wir betrachten nun das Problem der Transformation einer nichtdeterministischen in eine deterministische Turingmaschine.

- (a) Gegeben sei eine nichtdeterministische Turingmaschine TM nach erweiterter Definition, d.h. mit einer Menge S_Z von akzeptierenden Zuständen. L sei die von TM akzeptierte Sprache. Geben Sie ein allgemeines Verfahren zur Konstruktion einer deterministischen Turingmaschine TM' an, die dieselbe Sprache wie L akzeptiert (wobei die Eingaben auf das Alphabet von TM beschränkt seien).
- (b) **(H)** Wir betrachten die folgende nichtdeterministische Turingmaschine $TM = (T, S, \delta, s_0, S_Z)$, wobei $T = \{a, b, *\}$, $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$, $S_Z = \{s_3\}$ und δ aus den folgenden Tupeln bestehe:

$((s_0, a), (s_0, a, \gg))$,
 $((s_0, b), (s_0, b, \gg))$,
 $((s_0, *), (s_0, a, \gg)), ((s_0, *), (s_0, b, \gg))$,
 $((s_0, \#), (s_1, \#, \ll))$,
 $((s_1, a), (s_2, \#, \ll))$,
 $((s_2, b), (s_1, \#, \ll))$,
 $((s_1, \#), (s_3, \#, \downarrow))$

Geben Sie eine deterministische Turingmaschine an, die dieselbe Sprache wie TM akzeptiert (wobei die Eingaben auf das Alphabet von TM beschränkt seien).

Aufgabe 30 **Rekursive Mengen, rekursive Aufzählbarkeit**

Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Beweisen Sie Ihre Antwort.

- (a) Jede Teilmenge einer rekursiven Menge ist rekursiv aufzählbar.
- (b) Gegeben seien zwei rekursiv aufzählbare Mengen M_1 und M_2 . Sind die folgenden Mengen rekursiv aufzählbar?
 - (i) $M_a = M_1 \cup M_2$
 - (ii) $M_b = \{x : x \in M_1 \text{ gdw } x \in M_2\}$
- (c) Sei M eine rekursiv aufzählbare Menge von Paaren (x,y) . Ist die transitive Hülle von M rekursiv aufzählbar?

Aufgabe 31 Komplexität: Notationen

Neben der aus der Vorlesung bekannten O-Notation werden bei Komplexitätsuntersuchungen folgende Funktionsklassifikationen verwendet:

$$\begin{aligned} O(f(n)) &:= \{g(n) \mid \exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 \leq g(n) \leq c \cdot f(n) \text{ für } n \geq n_0\}; \\ \Omega(f(n)) &:= \{g(n) \mid \exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 \leq c \cdot f(n) \leq g(n) \text{ für } n \geq n_0\}; \\ \Theta(f(n)) &:= \{g(n) \mid \exists c_1, c_2 > 0, n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 \leq c_1 \cdot f(n) \leq g(n) \leq c_2 \cdot f(n) \text{ für } n \geq n_0\}; \end{aligned}$$

- (a) Seien f_i und f_j Funktionen der Funktionalität $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ und die Relationen $f_i <_O f_j \Leftrightarrow f_i \in O(f_j)$ sowie $f_i =_O f_j \Leftrightarrow (f_i \in \Theta(f_j)) \vee (f_j \in \Theta(f_i))$ gegeben. Ordnen Sie folgende Funktionen aufsteigend nach den Relationen $<_O$ und $=_O$:

$$\begin{aligned} f_1(n) &= 4 \log n, & f_2(n) &= 3n^2 + 4n \log n, & f_3(n) &= \frac{n}{6} (\log n)^2, \\ f_4(n) &= \sqrt{n} + 4n \log n, & f_5(n) &= n^{\log 6}, & f_6(n) &= 3^n, \\ f_7(n) &= 3^{n-3}, & f_8(n) &= 3 \log n, & f_9(n) &= n^{10} - n^6 + 5n^3, \\ f_{10}(n) &= 4 \log(n^3), & f_{11}(n) &= n^{\frac{n}{2}}, & f_{12}(n) &= 2^n, \\ f_{13}(n) &= \sqrt{4n} + 4 \log n \end{aligned}$$

- (b) Im Folgenden sind Paare von Funktionen $f(n)$ und $g(n)$ gegeben. Entscheiden und begründen Sie jeweils ob folgendes gilt: $f(n) \in O(g(n)), f(n) \in \Theta(g(n)), f(n) \in \Omega(g(n))$.

- (1) $f(n) = 3^n, \quad g(n) = 3^{n-1}$
- (2) $f(n) = n + 10, \quad g(n) = n + \sqrt{n}$
- (3) $f(n) = \frac{n^2}{\log^2 n}, \quad g(n) = n^{\frac{3}{2}}$
- (4) $f(n) = \ln n, \quad g(n) = n^k (k > 0)$

Aufgabe 32 (P) Nichtdeterministische Turing-Maschine

In dieser Aufgabe soll eine allgemein verwendbare Repräsentation für eine nichtdeterministische Turing-Maschine mit einem einzigen, einseitig unendlichen Band entwickelt werden. Diese Implementierung wird genutzt, um das Akzeptanzverhalten einer derartigen Maschine zu simulieren und den zugehörigen Ablauf im Detail nachzuvollziehen. Hierfür wird die Lösung aus Aufgabe 22 für eine deterministische Turing-Maschine entsprechend erweitert.

- (a) Entwickeln Sie in Java eine Klasse `TMConfiguration`, welche die Konfiguration einer Turing Maschine, also aktueller Zustand, Position des Schreib/Lese-Kopfes und Inhalt des Ein/Ausgabebands, auf geeignete Weise repräsentiert. Implementieren Sie eine Ausgabe der `toString()` Methode dieser Klasse, die eine eindeutige Identifikation der jeweiligen Konfiguration erlaubt.

- (b) Modifizieren Sie die Klasse `TuringMachine` aus Aufgabe 22 um die Simulation einer nichtdeterministischen Turing-Maschine zu ermöglichen. Hierfür ist zunächst die Methode `addTransition()` anzupassen, so dass nunmehr verschiedene Übergänge für ein und dieselbe Ausgangskonfiguration hinzugefügt werden können. Weiterhin sollen `step()` und `execute()` Methode so umgesetzt werden, dass ein in Aufgabe 21 beschriebenes Akzeptanzverhalten der Maschine erreicht wird. Demnach akzeptiert die Maschine ein Eingabewort auf dem Band, falls es eine *endliche* vollständige Berechnung gibt, deren terminale Konfiguration einen ausgezeichneten Endzustand enthält. Hingegen verwirft die Maschine ein Eingabewort, falls die terminale Konfiguration keinen Endzustand enthält oder die Berechnung tatsächlich nicht terminiert. Insbesondere die letztgenannte Möglichkeit erfordert eine besondere Strategie zur Expansion und Behandlung der Nachfolgekonfigurationen, die ein späteres Erreichen möglicher akzeptierender Konfigurationen sicherstellt.
- (c) Testen Sie die korrekte Umsetzung der in Teilaufgabe a) und b) entwickelten Repräsentation mit geeigneten nichtdeterministischen Turing-Maschinen, etwa durch Anwendung der in Aufgabe 21b vorgestellten Konstruktion oder der im Rahmen einer Lösungsvorlage bereitgestellten Testklasse.