1.4.8 Das Pumping-Lemma für kfS

kfG G=(T,N,$\rightarrow$,Z) ist in *Chomsky-Normalform* (CNF), falls alle Regeln folgende Gestalt haben:

$$a \rightarrow A \text{ oder } BC \rightarrow A, \quad \text{für } a \in T, A, B, C \in N.$$

Satz 7 Zu jeder kfG G mit $\varepsilon \notin L(G)$ gibt es eine äquivalente kfG in CNF. $\square$

Satz 8 (Pumping-Lemma)
Zu jeder kfS L existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass sich alle $z \in L$ mit $|z| \geq n$ in $u, v, w, x, y \in T^*$ zerlegen lassen: $z = u \circ v \circ w \circ x \circ y$, mit:

1. $|v \circ x| \geq 1$
2. $|v \circ w \circ x| \leq n$
3. für alle $i \geq 0 : u \circ v^i \circ w \circ x^i \circ y \in$ Ł

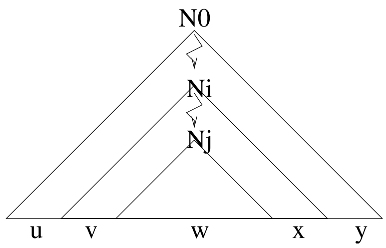
Beweis 4
Sei G=(T,N,$\rightarrow$, N_0) CNF-Gr. mit L(G)=L, $k = |N|, n = 2^k, z \in L$ mit $|z| \geq n$.
Ableitungsbaum T für z ist Binärbaum der Höhe $h+1$ mit $|z| \geq n$ Blätter.

- Knoten mit genau einem Sohn ($a \rightarrow A$) oder genau zwei Söhne ($BC \rightarrow A$)
- $h \geq \log_2 |z| \geq \log_2 n = k$

Im Pfad $p_0, \ldots p_{h+1}$ in T von der Wurzel zu Blatt p_{h+1}, ist die Markierung $N_0, N_1, \ldots N_h$ der Knoten $p_0, \ldots, p_{h+1}$ eine Folge von $h+1 \geq k+1$ Nichtterminalen. D.h. es gibt $i, j \in \{0, \ldots, h\}$, so dass:

$$N = N_i = N_j, \quad i < j, \quad N_{i+1}, \ldots, N_h \text{ paarweise verschieden}$$

Zerlegung von z in $z = u \circ v \circ w \circ x \circ y$ gemäß



1. Da G in CNF, ist $v \neq \varepsilon$ oder $x \neq \varepsilon$; d.h. $|vx| \geq 1$.
2. Teilbaum T' ab Knoten p_i ist Ableitungsbaum für $N_i \overset{*}{\twoheadrightarrow} v \circ w \circ x$.
   Aus $N_{i+1}, \ldots, N_h$ verschieden folgt: T' hat Höhe $h - i \leq k$.
   D.h. $|v \circ w \circ x| \leq 2^{h-i} \leq 2^k = n$
3. Ableitungen für $u \circ v^i \circ w \circ x^i \circ y$ ergeben sich aus der Kombination der Möglichkeiten: $S \overset{*}{\twoheadrightarrow} u \circ N \circ y \qquad N \overset{*}{\twoheadrightarrow} w, \qquad N \overset{*}{\twoheadrightarrow} vNx.$ $\square$