

Abgabe der Hausaufgaben (H) vor Beginn der Übung am 29. Oktober.

Aufgabe 1 (H) (*Beschränkte Relationen*)

Eine Relation \longrightarrow über der Menge A heißt *beschränkt*, wenn für jedes Element x die Länge aller von x ausgehenden Pfade beschränkt ist, formal:

$$\forall x \in A. \exists n. \nexists y \in A. x \xrightarrow{n} y$$

- Ist jede terminierende Relation beschränkt? Begründen Sie!
- Zeigen Sie: eine endlich verzweigte Relation ist genau dann terminierend, wenn sie beschränkt ist. Hinweis: fundierte Induktion.

Aufgabe 2 (H) (*Terminierung*)

- Zeigen oder widerlegen Sie: Jede azyklische und endlich verzweigte Relation terminiert.
- Zeigen Sie: $\xrightarrow{+}$ ist genau dann terminierend, wenn \longrightarrow terminierend ist.

Aufgabe 3 (Ü) (*Beispiel*)

Sei $(\mathbb{N}_+, \longrightarrow)$ das Reduktionssystem auf der Menge der positiven natürlichen Zahlen, mit $\longrightarrow = \{(n, m) \mid 3n = 2m \vee 5n = 11m\}$.

- Ist das Reduktionssystem terminierend? Begründen Sie ihre Antwort!
- Bestimmen Sie die Menge aller irreduziblen Elemente!
- Was ist die Normalform von 726? Zeigen Sie: $10 \longleftarrow^* 22$ und $20 \longleftarrow^* 99$!

Aufgabe 4 (Ü) (*Äquivalenzrelationen*)

Eine Relation $R \subseteq X \times X$ heißt *Äquivalenzrelation*, wenn gilt:

- R ist reflexiv, d.h. $\forall x \in X : x R x$
- R ist transitiv, d.h. $\forall x, y, z \in X : x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$
- R ist symmetrisch, d.h. $\forall x, y \in X : x R y \Rightarrow y R x$

Sei \longrightarrow eine Relation. Zeigen Sie: \longleftarrow^* ist die kleinste Äquivalenzrelation, die \longrightarrow enthält.

Aufgabe 5 (Ü) (*Konfluenz und Normalform*)

Zeigen Sie, dass das Reduktionssystem (A, \longrightarrow) genau dann konfluent und normalisierend ist, wenn jedes Element eine eindeutige Normalform besitzt.