Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Dr. Clemens Ballarin

Vorlesung Gleichungslogik
Wintersemester 2004/05
Übungsblatt 3
Besprechung am 12. November 2004

Aufgabe 1 (H) (*Komposition von Substitutionen*)

a) Geben Sie für die folgenden Paare von Substitutionen jeweils $\mathrm{Dom}(\sigma\tau)$ und $\sigma\tau$ an, letzteres in der Form $\{x \mapsto \cdot, \dots\}$.

   i) $\sigma = \{x \mapsto y\}, \tau = \{y \mapsto x\}$
   ii) $\sigma = \{x \mapsto x + y\}, \tau = \{x \mapsto y\}$
   iii) $\sigma = \{x \mapsto y\}, \tau = \{x \mapsto x + y\}$

b) Welche Bedingung über Domain und Variablenrange von σ und τ muss gelten, damit

   i) $\sigma\tau = \tau$ ii) $\tau\tau = \tau$

Aufgabe 2 (H) (*Gruppen*)

Seien $\circ$ ein binäres, $\cdot^{-1}$ ein unäres, und e ein nullstelliges Funktionssymbol. Seien weiterhin folgende Identitäten gegeben:

$$G = \{x \circ (y \circ z) \approx (x \circ y) \circ z, e \circ x \approx x, x^{-1} \circ x \approx e\}$$

Zeigen Sie $x \circ x^{-1} \overset{*}{\longleftrightarrow} e$.

Aufgabe 3 (Ü) (*Instanzen*)

Sei $T(\Sigma, \{x\})$ die Menge der Σ-Terme über der einzigen Variable x. Sei weiterhin die Reduktionsrelation $\longrightarrow_I$ auf $T(\Sigma, \{x\})$ wie folgt definiert: $s \longrightarrow_I t$ genau dann, wenn s eine Instanz von t ist, und $s \neq t$.

a) Zeigen Sie, dass $\longrightarrow_I$ terminierend und konfluent ist.

b) Lässt sich dieses Ergebnis auf Reduktionssysteme mit mehr als einer Variablen verallgemeinern?

Aufgabe 4 (Ü) (*Multimengenordnung*)

Zu einer strikten Ordnung $(A, >)$ sei eine Einschrittvariante $(\mathcal{M}, >^1_{mult})$ der Multimengenordnung $(\mathcal{M}, >_{mult})$ auf endlichen Multimengen wie folgt definiert:

$$M >^1_{mult} N \;:\Longleftrightarrow\; \exists x \in M, Y \in \mathcal{M}(A).\ N = (M - \{x\}) \cup Y \wedge \forall y \in Y.\ x > y$$

Zeigen Sie, dass die transitive Hülle von $>^1_{mult}$ genau die Multimengenordnung $>_{mult}$ aus der Vorlesung ist.