

### Aufgabe 1 (H) (*Äquivalenzklassen*)

Seien  $\Sigma = \{f, g\}$  und

$$E = \{f(f(x)) \approx f(x), g(f(x)) \approx f(x), f(g(x)) \approx g(x), g(g(x)) \approx g(x)\}$$

- Beschreiben Sie die  $\approx_E$ -Äquivalenzklassen.
- Bestimmen Sie zu jeder  $\approx_E$ -Äquivalenzklasse  $[t]_{\approx_E}$  einen kürzesten Term  $\hat{t}$  in  $[t]_{\approx_E}$ .
- Geben Sie ein Modell für  $E$  an, das mehr als ein Element enthält.

### Aufgabe 2 (H) (*Konsistenz*)

Eine Menge  $E$  von Gleichungen heisst *konsistent*, wenn sie ein Modell mit mehr als einem Element besitzt. Zeigen Sie folgende Aussagen:

- $E$  ist genau dann inkonsistent, wenn  $E \vdash x \approx y$  für zwei verschiedene Variablen  $x$  und  $y$  gilt.
- Enthält  $E$  eine Gleichung der Form  $t \approx x$  mit  $x \notin \text{Var}(t)$ , dann ist  $E$  inkonsistent.
- Wenn es ein Modell von  $E$  mit zwei Elementen gibt, dann gibt es für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein Modell von  $E$  mit  $2^n$  Elementen. Hinweis: Betrachten Sie Paare.

### Aufgabe 3 (Ü) (*Kommutativität von +*)

Seien  $\Sigma = \{0, s, +\}$  und  $E = \{x + 0 \approx x, x + s(y) \approx s(x) + y\}$ .

- Zeigen Sie  $E \models x + s(s(0)) \approx s(s(x))$  und  $E \models s^i(0) + s^j(0) \approx s^j(0) + s^i(0)$ .
- Zeigen Sie  $E \not\models x + y \approx y + x$ .  
Hinweis: Geben Sie ein Modell an, in dem  $E$  gilt, die Kommutativität aber nicht.

### Aufgabe 4 (Ü) (*Endliche Äquivalenzklassen*)

- Zeigen Sie, dass das Wort-Problem für  $E$  entscheidbar ist, wenn alle  $\approx_E$ -Äquivalenzklassen endlich sind.
- Zeigen Sie, dass die Gleichheit modulo Distributivität  $\approx_D$  entscheidbar ist.

$$D = \{x * (y + z) \approx (x * y) + (x * z), (x + y) * z \approx (x * z) + (y * z)\}$$