

### Aufgabe 1 (H) (*Terminierung*)

Ein Termersetzungssystem  $R$  heisst *rechtsreduziert*, wenn für alle  $(l \rightarrow r) \in R$  die rechte Seite  $r$  irreduzibel ist. Zeigen Sie, dass jedes rechtsreduzierte Termersetzungssystem, das keine Variablen auf den rechten Seiten enthält, terminiert.

Hinweis: Betrachten Sie die Positionen, an denen Regeln aus  $R$  angewandt werden können, und definieren Sie damit eine geeignete Ordnung auf Termen.

### Aufgabe 2 (H) (*Terminierung*)

Sei  $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ . Dabei sind  $a, b$  und  $c$  einstellige Funktionssymbole,  $d$  ist ein Konstantensymbol. Zeigen Sie, dass das Termersetzungssystem mit den Regeln

$$\begin{aligned}b(a(x)) &\longrightarrow a(b^2(c(x))) \\c(a(x)) &\longrightarrow a(b(c^2(x))) \\c(b(x)) &\longrightarrow b(c(x))\end{aligned}$$

terminiert!

Hinweis: Was gilt für die Vorkommen von  $a$  in einem Term? Betrachten Sie die Funktionssymbole „zwischen“ zwei Vorkommen von  $a$ !

### Aufgabe 3 (Ü) (*Polynomordnung*)

Sei  $\Sigma$  eine Signatur. Eine *Polynominterpretation* ist eine  $\Sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  mit den folgenden Eigenschaften:

- Die Trägermenge von  $\mathcal{A}$  ist eine Menge positiver Zahlen  $A \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$
- Jedem  $n$ -stelligen Funktionssymbol  $f \in \Sigma$  wird ein Polynom  $P_f(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{N}[X_1, \dots, X_n]$  mit nichtnegativen Koeffizienten und  $n$  Veränderlichen zugeordnet. Die Interpretation von  $f$  in  $\mathcal{A}$  ist dann definiert als  $f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) := P_f(a_1, \dots, a_n)$

Mit  $>_{\mathcal{A}}$  als terminierende Ordnung eignen sich Polynominterpretationen dazu, die Terminierung eines Termersetzungssystems zu zeigen.

Zeigen Sie durch Angabe einer geeigneten Polynominterpretation, dass folgendes Termersetzungssystem terminiert:

$$\{(x \oplus y) \oplus z \longrightarrow x \oplus (y \oplus z), x \odot (y \oplus z) \longrightarrow (x \odot y) \oplus (x \odot z)\}$$

*Bitte wenden!*

#### Aufgabe 4 (Ü) (*Hilberts zehntes Problem*)

Sei  $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$  ein Polynom mit  $n$  Veränderlichen und ganzzahligen Koeffizienten. Hilberts zehntes Problem besteht darin, festzustellen, ob es ein  $n$ -Tupel  $\vec{X} \in \mathbb{N}^n$  gibt, so dass  $P(\vec{X}) = 0$ . Hilberts zehntes Problem ist unentscheidbar. Zeigen Sie, dass dies die Unentscheidbarkeit des folgenden Problems impliziert:

Gegeben seien zwei Polynome  $P, Q \in \mathbb{N}[X_1, \dots, X_n]$  mit  $n$  Veränderlichen und nichtnegativen Koeffizienten. Sei weiterhin  $A$  eine (entscheidbare) Teilmenge von  $\mathbb{N}$ .

**Problem:** Gilt  $P >_A Q$ ? D.h. gilt  $\forall \vec{X} \in A^n. P(\vec{X}) > Q(\vec{X})$ ?

#### Aufgabe 5 (P) (*Unifikation in Gofer*)

Sie finden eine Standardimplementierung der Unifikation in Gofer in der Datei `unify.gs` auf der Webseite der Übung.

Modifizieren Sie das Programm so, dass es mit linearer statt exponentieller Platzkomplexität auskommt. Benutzen Sie dazu eine Art iterativer Darstellung der Lösungssubstitution, d.h. die Lösung des Unifikationsproblems  $\{x =^? f(y), y =^? g(z), z =^? a\}$  sollte ungefähr so dargestellt werden:  $[(x, f(y)), (y, g(z)), (z, a)]$ .

Hinweis: Im Algorithmus sollte diese iterative Substitution nur soweit angewendet werden, bis ein Term entsteht, der keine Variable ist.

Geben Sie den Quelltext und ein Ablaufprotokoll von Testläufen mit den Beispieldaten aus `unify.gs` ab.