Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Dr. Clemens Ballarin

Vorlesung Gleichungslogik
Wintersemester 2004/05
Übungsblatt 8
Besprechung am 17. Dezember 2004

Aufgabe 1 (H) (*Polynomordnung*)

Benutzen Sie die Polynominterpretation $\mathcal{A}$ mit $A = \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$ und $P_f(X, Y) = X^2 + XY$ um zu zeigen, dass folgendes Termersetzungssystem terminiert:

$$\{\ f(f(x, y), z) \longrightarrow f(x, f(y, z)),\ f(x, f(y, z)) \longrightarrow f(y, y)\ \}$$

Aufgabe 2 (H) (*Kritische Paare*)

Berechnen Sie alle kritischen Paare zu den folgenden Termersetzungssystemen:

a) $f(g(f(x))) \longrightarrow x,\ f(g(x)) \longrightarrow g(f(x))$

b) $g(f(x)) \longrightarrow f(g^2(h(x))),\ h(f(x)) \longrightarrow f(g(h^2(x))),\ h(g(x)) \longrightarrow g(h(x))$

c) $f(x, x) \longrightarrow a,\ f(x, g(x)) \longrightarrow b$

d) $f(f(x, y), z) \longrightarrow f(x, f(y, z)),\ f(x, a) \longrightarrow x$

e) $f(f(x, y), z) \longrightarrow f(x, f(y, z)),\ f(a, x) \longrightarrow x$

f) $0 + y \longrightarrow y,\ x + 0 \longrightarrow x,\ s(x) + y \longrightarrow s(x + y),\ x + s(y) \longrightarrow s(x + y)$

Welche der Systeme sind lokal konfluent, welche konvergent?

Aufgabe 3 (Ü) (*„Diamanteigenschaft“*)

Sei $\longrightarrow$ ein Reduktionssystem mit einer abgeschwächten Form der Diamanteigenschaft:

$$y \longleftarrow x \longrightarrow z \ \wedge\ y \neq z \quad \Longrightarrow \quad \exists u.\ y \longrightarrow u \longleftarrow z$$

Zeigen Sie, dass, wenn a eine Normalform besitzt, alle Reduktionen von a auf diese Normalform die gleiche Länge besitzen.

Aufgabe 4 (Ü) (*Newmans Lemma*)

Beweisen Sie Newmans Lemma indirekt, indem Sie zeigen, dass $\longrightarrow$ eine unendlich absteigende Kette besitzt, wenn $\longrightarrow$ lokal konfluent, aber nicht konfluent ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass jedes Element mit zwei verschiedenen Normalformen einen direkten Nachfolger mit zwei verschiedenen Normalformen besitzt.

Aufgabe 5 (Ü) (*Vervollständigung*)

Gegeben sei das Termersetzungssystem $R = \{\ f(g(f(x))) \longrightarrow g(x)\ \}$

a) Ist R konfluent?

b) Bestimment Sie ein konvergentes R' mit $\approx_R = \approx_{R'}$.