

### Aufgabe 1 (H) (*Kombinatorische Logik*)

Seien die Kombinatoren S, K und I wie folgt definiert:

$$I = \lambda x. x \quad K = \lambda xy. x \quad S = \lambda xyz. xz(yz)$$

Zeigen Sie, dass gilt:  $SKK \xrightarrow{*}_\beta I$

### Aufgabe 2 (H) (*Parallele $\beta$ -Reduktion*)

In der Vorlesung wurde die parallele  $\beta$ -Reduktion  $>$  wie folgt induktiv definiert:

$$\begin{aligned} s &> s \\ s > s' &\implies \lambda x.s > \lambda x.s' \\ s > s' \wedge t > t' &\implies (s t) > (s' t') \\ s > s' \wedge t > t' &\implies (\lambda x.s) t > s' [t'/x] \end{aligned}$$

a) Geben Sie eine induktive Definition der normalen  $\beta$ -Reduktion an.

b) Zeigen Sie:  $\longrightarrow_\beta \subseteq > \subseteq \xrightarrow{*}_\beta$

### Aufgabe 3 (Ü) (*Listen*)

Geben Sie  $\lambda$ -Terme für `nil`, `cons`, `hd`, `tl` und `null` an, die Listen im  $\lambda$ -Kalkül codieren. Zeigen Sie, dass mit Ihren Termen gilt:

$$\begin{aligned} \text{null nil} &\xrightarrow{*} \text{true} & \text{hd (cons } x \text{ l)} &\xrightarrow{*} x \\ \text{null (cons } x \text{ l)} &\xrightarrow{*} \text{false} & \text{tl (cons } x \text{ l)} &\xrightarrow{*} l \end{aligned}$$

Hinweis: Benutzen Sie Paare!

### Aufgabe 4 (Ü) (*Konfluenz der $\beta$ -Reduktion*)

In der Vorlesung wurde Konfluenz von  $\longrightarrow_\beta$  mit Hilfe der Diamanteigenschaft der parallelen  $\beta$ -Reduktion  $>$  gezeigt (vgl. Aufgabe 2). In dieser Aufgabe wird ein einfacherer Beweis entwickelt. Die Operation  $*$  auf  $\lambda$ -Termen wird induktiv über den Termaufbau definiert:

$$\begin{aligned} x^* &= x \\ (\lambda x. t)^* &= \lambda x. t^* \\ (t_1 t_2)^* &= t_1^* t_2^* \quad \text{für } t_1 t_2 \text{ nicht } \beta\text{-reduzierbar.} \\ ((\lambda x. t_1) t_2)^* &= t_1^* [t_2^*/x] \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie für zwei beliebige  $\lambda$ -Terme  $s$  und  $t$ :  $s > t \implies t > s^*$

b) Zeigen Sie die Konfluenz von  $\longrightarrow_\beta$ .