Technische Universität München | **Vorlesung Gleichungslogik**
Institut für Informatik | **Wintersemester 2006/07**
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D. | Übungsblatt 1
Dr. Norbert Schirmer | Besprechung am 26. Oktober 2006

Abgabe der Hausaufgaben (H) vor Beginn der Vorlesung am 25. Oktober.

Aufgabe 1 (H) (*Beschränkte Relationen*)

Eine Relation $\longrightarrow$ über der Menge A heisst *beschränkt*, wenn für jedes Element x die Länge aller von x ausgehenden Pfade beschränkt ist, formal:

$$\forall x \in A.\ \exists n.\ \nexists y \in A.\ x \xrightarrow{n} y$$

a) Ist jede terminierende Relation beschränkt? Begründen Sie!

b) Zeigen Sie: eine endlich verzweigte Relation ist genau dann terminierend, wenn sie beschränkt ist. Hinweis: fundierte Induktion.

Aufgabe 2 (H) (*Terminierung*)

a) Zeigen oder widerlegen Sie: Jede azyklische und endlich verzweigte Relation terminiert.

b) Zeigen Sie: $\xrightarrow{+}$ ist genau dann terminierend, wenn $\longrightarrow$ terminierend ist.

Aufgabe 3 (Ü) (*Beispiel*)

Sei $(\mathbb{N}_+, \longrightarrow)$ das Reduktionssystem auf der Menge der positiven natürlichen Zahlen, mit $\longrightarrow\ = \{(n,m) \mid 3n = 2m \vee 5n = 11m\}$.

a) Ist das Reduktionssystem terminierend? Begründen Sie ihre Antwort!

b) Bestimmen Sie die Menge aller irreduziblen Elemente!

c) Was ist die Normalform von 726? Zeigen Sie: $10 \longleftrightarrow 22$ und $20 \xleftrightarrow{*} 99$!

Aufgabe 4 (Ü) (*Äquivalenzrelationen*)

Eine Relation $R \subseteq X \times X$ heisst *Äquivalenzrelation*, wenn gilt:

- R ist reflexiv, d.h. $\forall x \in X : x\ R\ x$
- R ist transitiv, d.h. $\forall x, y, z \in X : x\ R\ y \wedge y\ R\ z \Rightarrow x\ R\ z$
- R ist symmetrisch, d.h. $\forall x, y \in X : x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$

Sei $\longrightarrow$ eine Relation. Zeigen Sie: $\xleftrightarrow{*}$ ist die kleinste Äquivalenzrelation, die $\longrightarrow$ enthält.

Aufgabe 5 (Ü) (*Konfluenz und Normalform*)

Zeigen Sie, dass das Reduktionssystem $(A, \longrightarrow)$ genau dann konfluent und normalisierend ist, wenn jedes Element eine eindeutige Normalform besitzt.