

Aufgabe 1 (H) (*Terme*)

Zeigen Sie folgende Lemmas mit Induktion. Es gilt jeweils $p \in \text{Pos}(s)$ und $q \in \text{Pos}(t)$.

a) $(s[t]_p)|_{pq} = t|_q$

b) $(s[t]_p)[r]_{pq} = s[t[r]_q]_p$

Aufgabe 2 (H) (*Gleichungsbeweise*)

Gegeben ist Gleichungsmenge G aus Übungsblatt 3, Aufgabe 2:

$$G = \{x \circ (y \circ z) \approx (x \circ y) \circ z, e \circ x \approx x, x^{-1} \circ x \approx e\}$$

Geben Sie einen *Ableitungsbaum* für $G \vdash x \circ x^{-1} \approx ((x^{-1})^{-1} \circ x^{-1}) \circ (x \circ x^{-1})$ an. Geben Sie in jedem Ableitungsschritt an, welche Regel Sie benutzen.

Aufgabe 3 (Ü) (*Modelle*)

Geben Sie eine Signatur Σ und eine Gleichungsmenge E über Σ an, so dass E ein zweielementiges, aber kein dreielementiges Modell besitzt.

Hinweis: In der Vorlesung „Diskrete Strukturen I“ wird eine algebraische Struktur mit einer geeigneten Eigenschaft eingeführt.

Aufgabe 4 (Ü) (*Gleichheit*)

Sei $\Sigma = \{f\}$ mit zweistelligem f und

$$E = \{f(x, f(y, z)) \approx f(f(x, y), z), f(x, x) \approx x, f(f(x, y), x) \approx f(x, y)\}$$

Ist die Frage, ob zwei Terme s und t bezüglich E gleich sind, entscheidbar?

Hinweis: Versuchen Sie herauszufinden, wie für einen Term s der kleinste zu s äquivalente Term aussieht.