

Aufgabe 1 (H) (*Äquivalenzklassen*)

Seien $\Sigma = \{f, g\}$ und

$$E = \{f(f(x)) \approx f(x), g(f(x)) \approx f(x), f(g(x)) \approx g(x), g(g(x)) \approx g(x)\}$$

- Beschreiben Sie die \approx_E -Äquivalenzklassen.
- Bestimmen Sie zu jeder \approx_E -Äquivalenzklasse $[t]_{\approx_E}$ einen kürzesten Term \hat{t} in $[t]_{\approx_E}$.
- Geben Sie ein Modell für E an, das mehr als ein Element enthält.

Aufgabe 2 (H) (*Konsistenz*)

Eine Menge E von Gleichungen heisst *konsistent*, wenn sie ein Modell mit mehr als einem Element besitzt. Zeigen Sie folgende Aussagen:

- E ist genau dann inkonsistent, wenn $E \vdash x \approx y$ für zwei verschiedene Variablen x und y gilt.
- Enthält E eine Gleichung der Form $t \approx x$ mit $x \notin \text{Var}(t)$, dann ist E inkonsistent.
- Wenn es ein Modell von E mit zwei Elementen gibt, dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Modell von E mit 2^n Elementen. Hinweis: Betrachten Sie Paare.

Aufgabe 3 (Ü) (*Kommutativität von +*)

Seien $\Sigma = \{0, s, +\}$ und $E = \{x + 0 \approx x, x + s(y) \approx s(x) + y\}$.

- Zeigen Sie $E \models x + s(s(0)) \approx s(s(x))$ und $E \models s^i(0) + s^j(0) \approx s^j(0) + s^i(0)$.
- Zeigen Sie $E \not\models x + y \approx y + x$.
Hinweis: Geben Sie ein Modell an, in dem E gilt, die Kommutativität aber nicht.

Aufgabe 4 (Ü) (*Endliche Äquivalenzklassen*)

- Zeigen Sie, dass das Wort-Problem für E entscheidbar ist, wenn alle \approx_E -Äquivalenzklassen endlich sind.
- Zeigen Sie, dass die Gleichheit modulo Distributivität \approx_D entscheidbar ist.

$$D = \{x * (y + z) \approx (x * y) + (x * z), (x + y) * z \approx (x * z) + (y * z)\}$$