

### Aufgabe 1 (H) (*Terminierung*)

Ein Termersetzungssystem  $R$  heisst *rechtsreduziert*, wenn für alle  $(l \rightarrow r) \in R$  die rechte Seite  $r$  irreduzibel ist. Zeigen Sie, dass jedes rechtsreduzierte Termersetzungssystem, das keine Variablen auf den rechten Seiten enthält, terminiert.

Hinweis: Betrachten Sie die Positionen, an denen Regeln aus  $R$  angewandt werden können, und definieren Sie damit eine geeignete Ordnung auf Termen.

### Aufgabe 2 (H) (*Terminierung*)

Sei  $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ . Dabei sind  $a, b$  und  $c$  einstellige Funktionssymbole,  $d$  ist ein Konstantensymbol. Zeigen Sie, dass das Termersetzungssystem mit den Regeln

$$\begin{aligned}b(a(x)) &\longrightarrow a(b^2(c(x))) \\c(a(x)) &\longrightarrow a(b(c^2(x))) \\c(b(x)) &\longrightarrow b(c(x))\end{aligned}$$

terminiert!

Hinweis: Was gilt für die Vorkommen von  $a$  in einem Term? Betrachten Sie die Funktionssymbole „zwischen“ zwei Vorkommen von  $a$ !

### Aufgabe 3 (Ü) (*Polynomordnung*)

Sei  $\Sigma$  eine Signatur. Eine *Polynominterpretation* ist eine  $\Sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  mit den folgenden Eigenschaften:

- Die Trägermenge von  $\mathcal{A}$  ist eine Menge positiver Zahlen  $A \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$
- Jedem  $n$ -stelligen Funktionssymbol  $f \in \Sigma$  wird ein Polynom  $P_f(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{N}[X_1, \dots, X_n]$  mit nichtnegativen Koeffizienten und  $n$  Veränderlichen zugeordnet. Die Interpretation von  $f$  in  $\mathcal{A}$  ist dann definiert als  $f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) := P_f(a_1, \dots, a_n)$

Mit  $>_{\mathcal{A}}$  als terminierende Ordnung eignen sich Polynominterpretationen dazu, die Terminierung eines Termersetzungssystems zu zeigen.

Zeigen Sie durch Angabe einer geeigneten Polynominterpretation, dass folgendes Termersetzungssystem terminiert:

$$\{(x \oplus y) \oplus z \longrightarrow x \oplus (y \oplus z), x \odot (y \oplus z) \longrightarrow (x \odot y) \oplus (x \odot z)\}$$

*Bitte wenden!*

#### Aufgabe 4 (Ü) (*Entscheidungsprozedur*)

Gegeben sei folgendes Verfahren, um festzustellen, ob ein Termersetzungssystem  $R = \{l_1 \rightarrow r_1, \dots, l_n \rightarrow r_n\}$  für Grundterme terminiert:

Beginne alle Reduktionssequenzen aufzuzählen, die mit  $r_1$  anfangen. Wenn eine dieser Sequenzen  $r_1$  wieder als Subterm enthält, dann terminiert das System nicht. Ansonsten fahre mit den Reduktionssequenzen beginnend in  $r_2$  fort usw.

Zeigen Sie, dass dieses Verfahren nicht geeignet ist, die Terminierung zu entscheiden!

#### Aufgabe 5 (P) (*Unifikation in Gofer*)

Sie finden eine Standardimplementierung der Unifikation in Gofer in der Datei `unify.gs` auf der Webseite der Übung.

Modifizieren Sie das Programm so, dass es mit linearer statt exponentieller Platzkomplexität auskommt. Benutzen Sie dazu eine Art iterativer Darstellung der Lösungssubstitution, d.h. die Lösung des Unifikationsproblems  $U = \{x =^? f(y), y =^? g(z), z =^? a\}$  sollte ungefähr so dargestellt werden:  $[(x, f(y)), (y, g(z)), (z, a)]$ .

Geben Sie den Quelltext und ein Ablaufprotokoll von Testläufen mit den Beispieldaten aus `unify.gs` ab.

Hinweise:

- $U$  ist nicht gelöster Form, da auf den linken Seiten immer noch Variablen vorkommen, die auch auf den rechten Seiten vorkommen.
- Aber  $U$  kann als speichereffiziente Implementierung der eigentlichen Substitution  $\sigma = \{x \mapsto f(g(a)), y \mapsto g(a), z \mapsto a\}$  gesehen werden. Man erhält  $\sigma$  aus  $U$  durch verfolgen der Variablenbelegungen die sich aus  $U$  ergeben, oder durch iteratives Anwenden der "Substitution"  $U$  auf die rechten Seiten von  $U$  selbst oder einen Term, bis sich keine Änderung mehr ergibt.
- Durch die Darstellung von  $\sigma$  als  $U$  vermeidet man das exponentielle Wachstum der Ergebnissubstitution.
- Um Zwischenergebnisse im Unifikationsalgorithmus durchzusubstituieren muss man  $U$  nun einige Male auffalten. Diese iterative Substitution muss aber nur soweit angewendet werden, bis ein Term entsteht, der keine Variable ist.