

Aufgabe 1 (H) (*Polynomordnung*)

Benutzen Sie die Polynominterpretation \mathcal{A} mit $A = \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$ und $P_f(X, Y) = X^2 + XY$ um zu zeigen, dass folgendes Termersetzungssystem terminiert:

$$\{ f(f(x, y), z) \longrightarrow f(x, f(y, z)), f(x, f(y, z)) \longrightarrow f(y, y) \}$$

Aufgabe 2 (H) (*Kritische Paare*)

Berechnen Sie alle kritischen Paare zu den folgenden Termersetzungssystemen:

- a) $f(g(f(x))) \longrightarrow x, f(g(x)) \longrightarrow g(f(x))$
- b) $g(f(x)) \longrightarrow f(g^2(h(x))), h(f(x)) \longrightarrow f(g(h^2(x))), h(g(x)) \longrightarrow g(h(x))$
- c) $f(x, x) \longrightarrow a, f(x, g(x)) \longrightarrow b$
- d) $f(f(x, y), z) \longrightarrow f(x, f(y, z)), f(x, a) \longrightarrow x$
- e) $f(f(x, y), z) \longrightarrow f(x, f(y, z)), f(a, x) \longrightarrow x$
- f) $0 + y \longrightarrow y, x + 0 \longrightarrow x, s(x) + y \longrightarrow s(x + y), x + s(y) \longrightarrow s(x + y)$

Welche der Systeme sind lokal konfluent, welche konvergent?

Aufgabe 3 (H) (*„Diamanteigenschaft“*)

Sei \longrightarrow ein Reduktionssystem mit einer abgeschwächten Form der Diamanteigenschaft:

$$y \longleftarrow x \longrightarrow z \wedge y \neq z \implies \exists u. y \longrightarrow u \longleftarrow z$$

Zeigen Sie, dass, wenn a eine Normalform besitzt, alle Reduktionen von a auf diese Normalform die gleiche Länge besitzen.

Aufgabe 4 (Ü) (*Newmans Lemma*)

Beweisen Sie Newmans Lemma indirekt, indem Sie zeigen, dass \longrightarrow eine unendlich absteigende Kette besitzt, wenn \longrightarrow lokal konfluent, aber nicht konfluent ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass jedes Element mit zwei verschiedenen Normalformen einen direkten Nachfolger mit zwei verschiedenen Normalformen besitzt.

Aufgabe 5 (Ü) (*Konfluenz*)

Bestimmen Sie r_1 und r_2 so, dass $\{f(g(x)) \longrightarrow r_1, g(h(x)) \longrightarrow r_2\}$ konfluent wird.

Bitte wenden!

Aufgabe 6 (Ü) (Vervollständigung)

Gegeben sei das Termersetzungssystem $R = \{ f(g(f(x))) \longrightarrow g(x) \}$

- a) Ist R konfluent?
- b) Bestimmen Sie ein konvergentes R' mit $\approx_R = \approx_{R'}$.