

Aufgabe 1 (H) (*Kombinatorische Logik*)

Seien die Kombinatoren S, K und I wie folgt definiert:

$$I = \lambda x. x \quad K = \lambda xy. x \quad S = \lambda xyz. xz(yz)$$

Zeigen Sie, dass gilt: $SKK \xrightarrow{*}_{\beta} I$

Aufgabe 2 (H) (*Parallele β -Reduktion*)

In der Vorlesung wurde die parallele β -Reduktion $>$ wie folgt induktiv definiert:

$$\begin{aligned} s > s & \\ s > s' & \implies \lambda x.s > \lambda x.s' \\ s > s' \wedge t > t' & \implies (s t) > (s' t') \\ s > s' \wedge t > t' & \implies (\lambda x.s) t > s' [t'/x] \end{aligned}$$

- Zeigen Sie: $\longrightarrow_{\beta} \subseteq > \subseteq \xrightarrow{*}_{\beta}$

Aufgabe 3 (Ü) (*Listen*)

Geben Sie λ -Terme für `nil`, `cons`, `hd`, `tl` und `null` an, die Listen im λ -Kalkül codieren. Zeigen Sie, dass mit Ihren Termen gilt:

$$\begin{aligned} \text{null nil} & \xrightarrow{*} \text{true} & \text{hd (cons } x \text{ l)} & \xrightarrow{*} x \\ \text{null (cons } x \text{ l)} & \xrightarrow{*} \text{false} & \text{tl (cons } x \text{ l)} & \xrightarrow{*} l \end{aligned}$$

Hinweis: Benutzen Sie Paare!

Aufgabe 4 (Ü) (*Konfluenz der β -Reduktion*)

In der Vorlesung wurde Konfluenz von \longrightarrow_{β} mit Hilfe der Diamanteigenschaft der parallelen β -Reduktion $>$ gezeigt (vgl. Aufgabe 2). In dieser Aufgabe wird ein einfacherer Beweis entwickelt. Die Operation $*$ auf λ -Termen wird induktiv über den Termaufbau definiert:

$$\begin{aligned} x^* & = x \\ (\lambda x. t)^* & = \lambda x. t^* \\ (t_1 t_2)^* & = t_1^* t_2^* \quad \text{für } t_1 t_2 \text{ nicht } \beta\text{-reduzierbar.} \\ ((\lambda x. t_1) t_2)^* & = t_1^* [t_2^*/x] \end{aligned}$$

- Zeigen Sie für zwei beliebige λ -Terme s und t : $s > t \implies t > s^*$
- Zeigen Sie die Konfluenz von \longrightarrow_{β} .