

Vorlesung Perlen der Informatik II

Aufgabe 1 Existenzquantor

Der Existenzquantor ist in HOL wie folgt definiert:

$$\exists P \equiv \forall Q. (\forall x. P x \longrightarrow Q) \longrightarrow Q$$

wobei $\exists x. P x$ abkürzend für $\exists (\lambda x. P x)$ geschrieben wird. Leiten Sie aus dieser Definition die folgende Introduktions- und Eliminationsregel her:

$$\exists_I : P x \longrightarrow (\exists x. P x)$$

$$\exists_E : (\exists x. P x) \longrightarrow (\forall x. P x \longrightarrow Q) \longrightarrow Q$$

Aufgabe 2 Hilbert's Auswahloperator

Der Hilbert'sche Auswahloperator ε wird durch das Axiom

$$\varepsilon_I : P x \longrightarrow P (\varepsilon x. P x)$$

charakterisiert.

- Zeigen Sie, daß sich \exists mit Hilfe von ε ausdrücken läßt.
- Zeigen Sie, daß die Hinzunahme des Hilbert'schen Auswahloperators HOL bereits zu einer *klassischen* Logik macht, indem Sie (ohne Zuhilfenahme anderer klassischer Regeln!) beweisen, daß $A \vee \neg A$ für beliebiges A gilt. Tip: definieren Sie die beiden Hilfsprädikate

$$P \equiv \lambda X. X = \text{False} \vee X = \text{True} \wedge A$$

$$Q \equiv \lambda X. X = \text{False} \wedge A \vee X = \text{True}$$

Aufgabe 3 Schwacher Auswahloperator

Der schwache Auswahloperator ι (definite description operator) wird durch das Axiom

$$\iota_{triv=} : (\iota x. x = a) = a$$

charakterisiert.

- Beweisen Sie mit Hilfe des obigen Axioms die Regeln

$$\iota_= : P a \longrightarrow (\forall x. P x \longrightarrow x = a) \longrightarrow (\iota x. P x) = a$$

$$\iota_I : P a \longrightarrow (\forall x. P x \longrightarrow x = a) \longrightarrow P (\iota x. P x)$$

- Definieren Sie mit Hilfe des Auswahloperators ι eine Funktion

$$\text{If} :: \text{bool} \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha$$

Mit der Eigenschaft

$$\text{If True } x \ y = x$$

$$\text{If False } x \ y = y$$