

Perlen der Informatik 2 6. Übung

1 Natürliches Schließen

Für die Beweise auf diesem Übungsblatt gelten die folgenden Spielregeln:

- Es dürfen nur die Methoden *rule*, *erule* und *assumption* verwendet werden (ggf. auch *drule* und *frule*).
- Es dürfen nur diese Regeln verwendet werden:

TrueI: *True*,

FalseE: *False* $\implies A$,

notI: $(A \implies \textit{False}) \implies \neg A$,

notE: $\neg A \implies A \implies B$,

conjI: $A \implies B \implies A \wedge B$,

conjE: $A \wedge B \implies (A \implies B \implies C) \implies C$,

disjI1: $A \implies A \vee B$,

disjI2: $A \implies B \vee A$,

disjE: $A \vee B \implies (A \implies C) \implies (B \implies C) \implies C$,

impI: $(A \implies B) \implies A \longrightarrow B$,

impE: $A \longrightarrow B \implies A \implies (B \implies C) \implies C$,

mp: $A \longrightarrow B \implies A \implies B$

iffI: $(A \implies B) \implies (B \implies A) \implies A = B$,

iffE: $A = B \implies (A \longrightarrow B \implies B \longrightarrow A \implies C) \implies C$

ccontr: $(\neg A \implies \textit{False}) \implies A$

sowie alle Regeln, die mit Hilfe dieser Regeln und den Methoden *rule*, *erule* oder *assumption* hergeleitet wurden.

2 Aussagenlogik

Finden Sie Beweise im *apply*-Stil für die folgenden Aussagen:

$$(A \wedge B) \wedge C \longrightarrow A \wedge B \wedge C$$

$$(A \vee B) \vee C \longrightarrow A \vee B \vee C$$

$$(A \longrightarrow B) \longrightarrow \neg B \longrightarrow \neg A$$

3 Strukturierte Beweise

Finden Sie strukturierte Isar-Beweise für die folgenden Aussagen:

$$(A \longrightarrow B \longrightarrow C) \longrightarrow (A \longrightarrow B) \longrightarrow A \longrightarrow C$$

$$(A \wedge (B \vee C)) = (A \wedge B \vee A \wedge C)$$

de_morgan_1:

$$\neg (A \vee B) \implies \neg A \wedge \neg B$$

4 Klassische Logik

Beweise, die die nicht-intuitionistische Regel *ccontr* (classical contradiction) benötigen, sind meist schwieriger. Zeigen Sie:

de_morgan_2:

$$\neg (A \wedge B) \implies \neg A \vee \neg B$$

5 Etwas Arithmetik

Für diese Aufgabe dürfen alle Methoden und Lemmas verwendet werden.

Ein Buch über die vedische Mathematik beschreibt drei Methoden, die Berechnung des Quadrats von natürlichen Zahlen zu vereinfachen:

- *MM1*: Zahlen, für die das Quadrat des Vorgängers entweder bekannt oder einfach zu berechnen ist. Zum Beispiel:
 Gesucht: 61^2
 Gegeben: $60^2 = 3600$
 Folglich: $61^2 = 3600 + 60 + 61 = 3721$
- *MM2*: Zahlen größer, aber nahe 100. Zum Beispiel:
 Gesucht: 102^2
 Sei $h = 102 - 100 = 2$, somit $h^2 = 4$
 Folglich: $102^2 = 102 + h$ um 2 Stellen nach links verschoben $+ h^2 = 10404$
- *MM3*: Zahlen, die mit 5 enden. Zum Beispiel:
 Gesucht: 85^2
 Folglich: $85^2 = 8 * 9$ gefolgt von 25 = 7225
 Gesucht: 995^2
 Folglich: $995^2 = 99 * 100$ gefolgt von 25 = 990025

In dieser Übung werden wir zeigen, dass diese Methoden letztenendes gar nicht so magisch sind:

- Fassen Sie *MM1* in eine primitiv rekursive Funktion *sq*.
- Zeigen Sie, dass Ihre Definition von *sq* korrekt ist: $sq\ n = n * n$.
- Formulieren und beweisen Sie die Korrektheit von *MM2* und *MM3*. Hinweise:
 - Stützen Sie ihre Formulierung auf die Funktion *sq* ab.
 - Verallgemeinern Sie *MM2* auf eine beliebige Konstante (statt 100).
 - Versuchen Sie die Eigenschaft ‘die mit 5 enden’ so zu formulieren, dass es einfach ist, den Rest der Zahl zu erhalten.

- Die Subtraktion auf natürlichen Zahlen kann beim Beweisen unhandlich sein (warum?). Evtl. ist es günstiger, Subtraktion geschickt in Vorbedingungen einzukodieren.
- Wenn Sie Induktion machen, verallgemeinern Sie, wenn nötig, alle Variablen außer der Induktionsvariable.
- Benutzen Sie *find_theorems* zur Suche nach arithmetischen Regeln, die Sie benötigen. Es kann auch nötig sein, Regeln für *sq* zu beweisen (z.B. die erste binomische Formel).