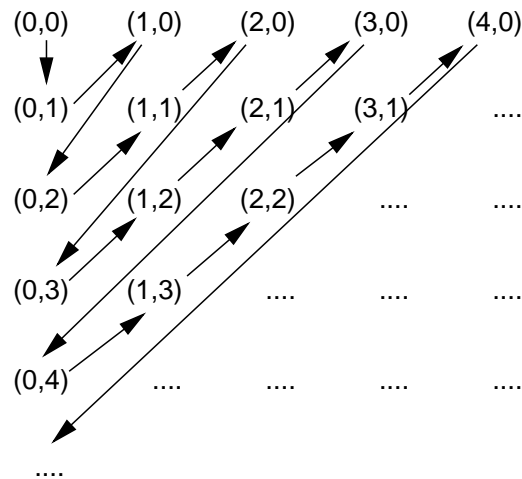


Vorlesung Perlen der Informatik

Aufgabe 1 Abzählbarkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Die Abzählbarkeit von Paaren von natürlichen Zahlen kann durch das sogenannte Cantorsche Diagonalverfahren gezeigt werden, das in der folgenden Abbildung dargestellt ist:



Definieren Sie nach diesem Schema die folgenden Funktionen:

- Eine (injektive) *Codierungsfunktion* $e : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- Eine *Decodierungsfunktion* $d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, daß $\forall m, n \in \mathbb{N}. d(e(m, n)) = (m, n)$.

Definieren Sie diese Funktionen

1. unter Verwendung elementarer Funktionen wie Multiplikation etc.
2. mittels Rekursion

Aufgabe 2 Hilbert's Hotel

Stellen Sie sich ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern vor. Selbst wenn in diesem Hotel alle Zimmer belegt sind, kann immer noch Platz für einen neu ankommenden Gast geschaffen werden. Hierfür muß jeder der anwesenden Gäste von Zimmer n in Zimmer $n + 1$ umziehen. Der neu angekommene Gast wird dann in Zimmer 0 untergebracht. Stellen Sie sich nun vor, daß jeden Tag eine abzählbar unendliche Anzahl von Gästen ankommt, die im Hotel untergebracht werden muß.

- Wie kann man die Gäste so geschickt auf die Zimmer verteilen, daß keiner der bereits untergebrachten Gäste umziehen muß?
- Wie kann man dieses Verfahren für die Aufzählung von Paaren von natürlichen Zahlen verwenden?

Aufgabe 3 Abzählbarkeit von Σ^*

Sei Σ ein endliches Alphabet, d.h. $\Sigma = \{a_0, \dots, a_k\}$. Zeigen Sie, daß die Menge Σ^* der endlichen Wörter über dem Alphabet Σ abzählbar ist, indem Sie die folgenden Funktionen definieren:

- Eine (injektive) *Codierungsfunktion* $e : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$
- Eine *Decodierungsfunktion* $d : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma^*$ mit der Eigenschaft, daß $\forall w \in \Sigma^*. d(e(w)) = w$.

Aufgabe 4 Abzählbarkeit von \mathbb{N}^*

Zeigen Sie, daß auch die Menge \mathbb{N}^* der endlichen Wörter über \mathbb{N} abzählbar ist, indem Sie geeignete Codierungs- und Decodierungsfunktionen angeben.