

Reduktion von 3SAT auf Hamilton-Kreis

Eine Formel

$$F = (z_{1,1} \vee z_{1,2} \vee z_{1,3}) \wedge \dots \wedge (z_{m,1} \vee z_{m,2} \vee z_{m,3})$$

mit Prädikatvariablen P_1, \dots, P_n wird wie folgt kodiert:

- Jede Prädikatvariable wird durch einen Knoten dargestellt, der 2 Ausgangs- und 2 Eingangskanten hat. Die beiden Ausgangskanten entsprechen der Belegung der Variable mit dem Wahrheitswert T bzw. F .
- Jede Klausel wird durch einen Teilgraphen der in Abbildung 1 dargestellten Form mit je drei Eingängen und 3 Ausgängen dargestellt. Diese Teilgraphen seien mit K_1, \dots, K_m bezeichnet.

Seien $k_{i,1}, \dots, k_{i,l_i}$ die Klauseln, in denen die Variable P_i *positiv* an den Positionen $p_{i,1}, \dots, k_{i,l_i}$ vorkommt, d.h.

$$\forall 1 \leq j \leq l_i. z_{k_{i,j}, p_{i,j}} = P_i$$

Seien analog dazu $\bar{k}_{i,1}, \dots, \bar{k}_{i,\bar{l}_i}$ die Klauseln, in denen die Variable P_i *negativ* an den Positionen $\bar{p}_{i,1}, \dots, \bar{k}_{i,\bar{l}_i}$ vorkommt, d.h.

$$\forall 1 \leq j \leq \bar{l}_i. z_{\bar{k}_{i,j}, \bar{p}_{i,j}} = \neg P_i$$

Der Graph enthält nun die folgenden Kanten:

- Vom Knoten P_i führt eine Kante zum Eingang $p_{i,1}$ des Teilgraphen $K_{k_{i,1}}$.
- Für alle $1 \leq j < l_i$ führt eine Kante vom Ausgang $p_{i,j}$ des Teilgraphen $K_{k_{i,j}}$ zum Eingang $p_{i,j+1}$ des Teilgraphen $K_{k_{i,j+1}}$.
- Ist $i < n$, so führt eine Kante vom Ausgang p_{i,l_i} des Teilgraphen $K_{k_{i,l_i}}$ zum Knoten P_{i+1} .
- Es führt eine Kante vom Ausgang p_{n,l_n} des Teilgraphen $K_{k_{n,l_n}}$ zum Knoten P_1 .
- Vom Knoten P_i führt eine Kante zum Eingang $\bar{p}_{i,1}$ des Teilgraphen $K_{\bar{k}_{i,1}}$.
- Für alle $1 \leq j < \bar{l}_i$ führt eine Kante vom Ausgang $\bar{p}_{i,j}$ des Teilgraphen $K_{\bar{k}_{i,j}}$ zum Eingang $\bar{p}_{i,j+1}$ des Teilgraphen $K_{\bar{k}_{i,j+1}}$.

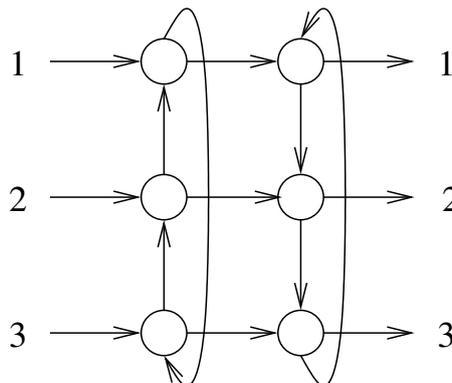


Abbildung 1: Kodierung von Klauseln

- Ist $i < n$, so führt eine Kante vom Ausgang \bar{p}_{i,\bar{l}_i} des Teilgraphen $K_{\bar{k}_i,\bar{l}_i}$ zum Knoten P_{i+1} .
- Es führt eine Kante vom Ausgang \bar{p}_{n,\bar{l}_n} des Teilgraphen $K_{\bar{k}_n,\bar{l}_n}$ zum Knoten P_1 .
- Ist $l_i = 0$ bzw. $\bar{l}_i = 0$, d.h. P_i hat kein positives bzw. negatives Vorkommen, so führt eine Kante direkt von P_i zu P_{i+1} falls $i < n$, bzw. von P_i zu P_1 falls $i = n$.

Die Formel F ist erfüllt, wenn jede Klausel erfüllt ist. Dies bedeutet wiederum, daß mindestens ein Literal in jeder Klausel erfüllt sein muß, d.h. es muß einen Hamilton-Kreis geben, der jeden Teilgraphen K_j mindestens einmal (und maximal dreimal) passiert. Auf dem Weg von Knoten P_i nach P_{i+1} werden dabei entweder alle Teilgraphen K_i passiert, die den Klauseln entsprechen, in denen P_i *positiv* vorkommt, oder alle, die den Klauseln entsprechen, in denen P_i *negativ* vorkommt.

In Abbildung 2 ist der Graph abgebildet, der der Formel

$$(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$$

entspricht. Die gestrichelten Linien stellen einen Hamilton-Kreis dar, der der erfüllenden Belegung \mathcal{I} mit

$$\mathcal{I}(P) = T, \quad \mathcal{I}(Q) = F, \quad \mathcal{I}(R) = F$$

entspricht.

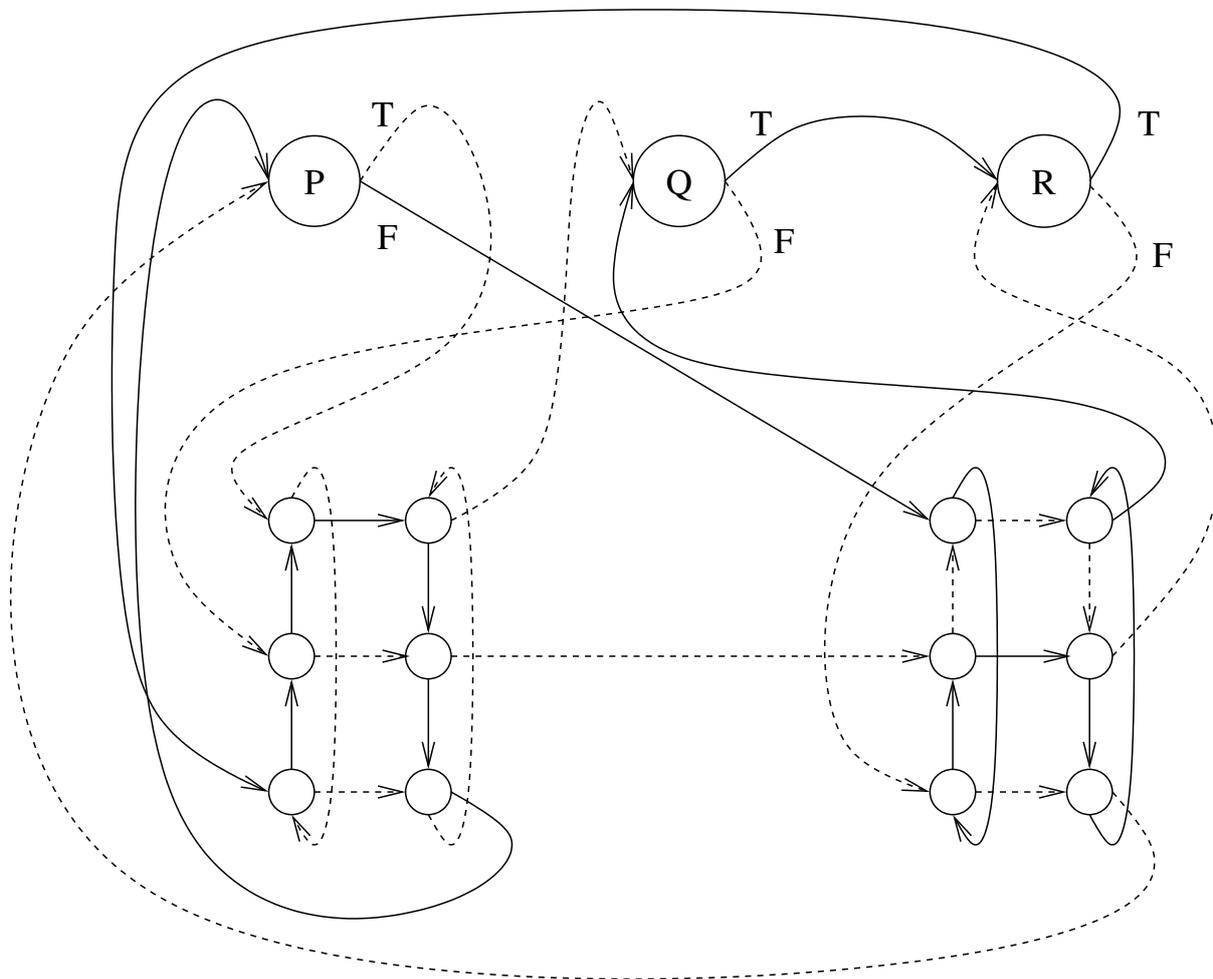


Abbildung 2: Kodierung der Formel $(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$