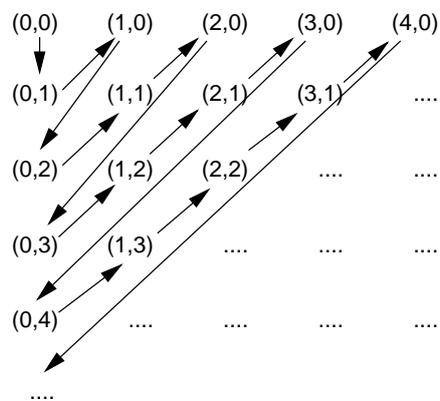


Perlen der Informatik 1. Übung

Aufgabe G1.1 Abzählbarkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Die Abzählbarkeit von Paaren natürlicher Zahlen kann mit dem sogenannten Cantorschen Diagonalverfahren gezeigt werden, das durch folgende Abbildung veranschaulicht wird:



Definieren Sie nach diesem Schema

- eine (injektive, totale) *Codierungsfunktion* $e : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- eine *Decodierungsfunktion* $d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, so dass gilt

$$\forall m, n \in \mathbb{N}. d(e(m, n)) = (m, n)$$

Definieren Sie diese Funktionen

1. unter Verwendung elementarer Funktionen wie Multiplikation etc.
2. mittels Rekursion

Aufgabe G1.2 Abzählbarkeit von Σ^*

Sei $\Sigma = \{a_0, \dots, a_k\}$ ein endliches Alphabet. Zeigen Sie, dass die Menge Σ^* der endlichen Wörter über Σ abzählbar ist. Wie liegt der Fall, wenn Σ abzählbar unendlich ist?

Aufgabe G1.3 Mächtigkeit der Potenzmenge

Ähnlich wie bei der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen kann man durch einen Widerspruchsbeweis zeigen, dass für eine beliebige Menge M die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ stets mächtiger ist als M selbst: Zeigen Sie, dass es keine surjektive Abbildung $f : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ geben kann.

Aufgabe H1.1 Hilberts Hotel

Stellen Sie sich ein Hotel mit abzählbar unendlich vielen Zimmern vor. Selbst wenn in diesem Hotel alle Zimmer belegt sind, kann immer noch Platz für einen neu ankommenden Gast geschaffen werden. Hierfür muss jeder der anwesenden Gäste von Zimmer n in Zimmer $n + 1$ umziehen. Der neu angekommene Gast wird dann in Zimmer 0 untergebracht. Stellen Sie sich nun vor, dass jeden Tag eine abzählbar unendliche Anzahl von Gästen ankommt, die im Hotel untergebracht werden muss.

- Wie kann man die Gäste so geschickt auf die Zimmer verteilen, dass keiner der bereits untergebrachten Gäste umziehen muss?
- Bekommt die Hotelleitung ein Problem, wenn plötzlich an einem Tag abzählbar unendlich viele Busse mit jeweils abzählbar unendlich vielen Gästen ankommen?

Aufgabe H1.2 Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. M ist abzählbar.
2. Die Menge $\mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$ aller endlichen Teilmengen von M ist abzählbar.
3. Die Menge M^* aller endlichen Wörter über M ist abzählbar.
4. Jede echte Teilmenge $N \subset M$ ist abzählbar.

Aufgabe H1.3 Injektivität vs. Surjektivität

Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. Es gibt eine injektive totale Abbildung $f : M \rightarrow N$.
2. Es gibt eine surjektive Abbildung $g : N \rightarrow M$.

Aufgabe H1.4

Zeigen Sie:

1. Die Menge der monotonen und beschränkten Funktionen von \mathbb{N} nach \mathbb{N} ist abzählbar.
2. Die Menge \mathbb{N} ist die "kleinste" unendliche Menge, d.h. jede unendliche Menge kann surjektiv auf \mathbb{N} abgebildet werden.