

Perlen der Informatik 2. Übung

Aufgabe G2.1 Intuitive Berechenbarkeit

Sind die folgenden Funktionen berechenbar? Für welche kann man sogar einen Algorithmus explizit angeben? Dabei sei $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine totale, berechenbare Funktion und $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine nicht berechenbare Funktion. Weiter ist über die Funktionen g und h nichts bekannt.

$$f_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ eine Primzahl ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls es eine Primzahl } p \geq n \text{ gibt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_3(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls es einen Primzahlzwilling } (p, p + 2) \text{ mit } p \geq n \text{ gibt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hinweis: Ein Primzahlzwilling ist ein Paar von Primzahlen, deren Differenz 2 beträgt (z.B. (11, 13)). Es ist nicht bekannt, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

$$f_4(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } g(n) = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_5(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ h(n) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_6(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ h(f_6(n - 1)) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_7(n) = \begin{cases} n & \text{falls es ein } m \text{ gibt mit } h(m) \leq m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe G2.2 Halteproblem an der Stelle 0

Zeigen Sie mit Hilfe einer geeigneten Reduktion, dass die Menge

$$T_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n(0) \neq \perp\}$$

unentscheidbar ist.

Aufgabe G2.3 Satz von Rice

Benutzen Sie den Satz von Rice, um die Unentscheidbarkeit folgender Probleme zu zeigen. Geben Sie zunächst die jeweils die Menge formal an, durch die das Problem beschrieben wird.

- Es soll entschieden werden, ob ein Programm eine totale Funktion berechnet. (Totalitätsproblem)
- Es soll entschieden werden, ob zwei (durch ihre Programmnummern angegebenden) Programme dieselbe Funktion berechnen. (Äquivalenzproblem)

Aufgabe H2.1 Zum Nachdenken

Der Satz von Rice ist ein sehr starkes Unentscheidbarkeitsresultat über Eigenschaften von Programmen. Dennoch gibt es viele Eigenschaften von Programmen, die mit Hilfe von geeigneten Tools geprüft werden können, z.B.

- ob alle Variablen vor Verwendung initialisiert werden
- ob das Programm typkorrekt ist, also keine Typfehler zur Laufzeit auftreten können
- ob das Programm mögliche Sicherheitslücken wie z.B. Buffer-Overflows enthält

Warum ist die Existenz solcher Verfahren kein Widerspruch zum Satz von Rice? Was hat der Satz von Rice andererseits für Konsequenzen für die Verfahren?

Aufgabe H2.2 Schröder-Bernstein-Theorem (schwer!)

Seien A und B Mengen, so dass zwei injektive und totale Funktionen $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow A$ existieren. Zeigen Sie: Dann gibt es auch eine bijektive Abbildung $h : A \rightarrow B$.