

Vorlesung Perlen der Informatik

Aufgabe 1 Fixpunkt-Induktion

Wir betrachten Zeichenketten über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$. Die Menge $L \subseteq \Sigma^*$ ist induktiv definiert durch folgende zwei Regeln:

$$\frac{}{\epsilon \in L} \quad \frac{w \in L}{\mathbf{a}w\mathbf{b} \in L}$$

- Zeigen Sie per Induktion, dass $L \subseteq \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. *Das ist nicht schwer, aber es ist ein formal sauberer Beweis gefragt.*
- Interpretieren Sie die induktive Definition von L als kleinsten Fixpunkt nach Knaster-Tarski: Wie lautet die zugehörige Funktion f ?
- Ihrem Induktionsbeweis aus a) liegt ein allgemeines Induktionsprinzip für kleinste Fixpunkte zugrunde. Formulieren und beweisen Sie dieses Prinzip.

Aufgabe 2 Fixpunkte von stetigen Funktionen

Eine Funktion $f : 2^A \rightarrow 2^A$ heißt *stetig*, wenn gilt

- f ist monoton
- Für jede Folge von Mengen $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \dots$ gilt

$$f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(M_n)$$

Zeigen Sie: Wenn f stetig ist, dann ist $\text{fix}(f) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\emptyset)$ der kleinste Fixpunkt von f .

Aufgabe 3

Was halten Sie von folgenden induktiven Definitionen?

- $X \subseteq \mathbb{Z}$ ist definiert durch

$$\frac{}{0 \in X} \quad \frac{x \in X}{x+1 \in X} \quad \frac{\forall z > 0. z \in X}{-1 \in X}$$

- $A \subseteq \mathbb{N}$ ist definiert durch

$$\frac{n+1 \notin A}{n \in A} \quad \frac{n \notin A}{n+1 \in A}$$