

## Vorlesung Perlen der Informatik

### Aufgabe 1 Konjunktion Diophantischer Gleichungen

Zeigen Sie, daß sich das Problem der Lösung einer Konjunktion von Diophantischen Gleichungen

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \wedge \dots \wedge f_k(x_1, \dots, x_n) = 0$$

auf das Problem der Lösung einer einzelnen Gleichung reduzieren läßt.

### Aufgabe 2 Disjunktion Diophantischer Gleichungen

Zeigen Sie, daß sich das Problem der Lösung einer Disjunktion von Diophantischen Gleichungen

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \vee \dots \vee f_k(x_1, \dots, x_n) = 0$$

auf das Problem der Lösung einer einzelnen Gleichung reduzieren läßt.

### Aufgabe 3 Diophantische Gleichungen in $\mathbb{N}$

Zeigen Sie, daß sich das Problem der Lösung einer Diophantischen Gleichung in  $\mathbb{N}$  auf das Problem der Lösung einer Gleichung in  $\mathbb{Z}$  reduzieren läßt. **Hinweis:** Verwenden Sie hierzu ein Theorem von Lagrange, demzufolge sich jede natürliche Zahl als Summe von vier Quadratzahlen darstellen läßt, d.h.

$$\forall x \in \mathbb{N}. \exists u, v, w, z \in \mathbb{Z}. x = u^2 + v^2 + w^2 + z^2$$

### Aufgabe 4 Diophantische Gleichungen in $\mathbb{Z}$

Zeigen Sie, daß sich das Problem der Lösung einer Diophantischen Gleichung in  $\mathbb{Z}$  auf das Problem der Lösung einer Gleichung in  $\mathbb{N}$  reduzieren läßt.

### Aufgabe 5

Zeigen Sie nun, daß sich das Problem der Lösung mehrerer Diophantischer Gleichungen in  $\mathbb{N}$  auf das Problem der Lösung einer Diophantischen Gleichung in  $\mathbb{Z}$  reduzieren läßt.

### Aufgabe 6

Zeigen Sie, daß das Problem der Lösung einer Diophantischen Gleichung

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$$

mit nur einer Variablen in  $\mathbb{Z}$  entscheidbar ist. **Hinweis:** Zeigen Sie, daß es eine Zahl  $m$  gibt, so daß  $|x| \leq m$  für alle Lösungen der obigen Gleichung gilt.