

# Reduktion von 3SAT auf Hamilton-Kreis

Eine Formel

$$F = (z_{1,1} \vee z_{1,2} \vee z_{1,3}) \wedge \dots \wedge (z_{m,1} \vee z_{m,2} \vee z_{m,3})$$

mit Prädikatvariablen  $P_1, \dots, P_n$  wird wie folgt kodiert:

- Jede Prädikatvariable wird durch einen Knoten dargestellt, der 2 Ausgangs- und 2 Eingangskanten hat. Die beiden Ausgangskanten entsprechen der Belegung der Variable mit dem Wahrheitswert  $T$  bzw.  $F$ .
- Jede Klausel wird durch einen Teilgraphen der in Abbildung 1 dargestellten Form mit je drei Eingängen und 3 Ausgängen dargestellt. Diese Teilgraphen seien mit  $K_1, \dots, K_m$  bezeichnet.

Seien  $k_{i,1}, \dots, k_{i,l_i}$  die Klauseln, in denen die Variable  $P_i$  *positiv* an den Positionen  $p_{i,1}, \dots, k_{i,l_i}$  vorkommt, d.h.

$$\forall 1 \leq j \leq l_i. z_{k_{i,j}, p_{i,j}} = P_i$$

Seien analog dazu  $\bar{k}_{i,1}, \dots, \bar{k}_{i,\bar{l}_i}$  die Klauseln, in denen die Variable  $P_i$  *negativ* an den Positionen  $\bar{p}_{i,1}, \dots, \bar{k}_{i,\bar{l}_i}$  vorkommt, d.h.

$$\forall 1 \leq j \leq \bar{l}_i. z_{\bar{k}_{i,j}, \bar{p}_{i,j}} = \neg P_i$$

Der Graph enthält nun die folgenden Kanten:

- Vom Knoten  $P_i$  führt eine Kante zum Eingang  $p_{i,1}$  des Teilgraphen  $K_{k_{i,1}}$ .
- Für alle  $1 \leq j < l_i$  führt eine Kante vom Ausgang  $p_{i,j}$  des Teilgraphen  $K_{k_{i,j}}$  zum Eingang  $p_{i,j+1}$  des Teilgraphen  $K_{k_{i,j+1}}$ .
- Ist  $i < n$ , so führt eine Kante vom Ausgang  $p_{i,l_i}$  des Teilgraphen  $K_{k_{i,l_i}}$  zum Knoten  $P_{i+1}$ .
- Es führt eine Kante vom Ausgang  $p_{n,l_n}$  des Teilgraphen  $K_{k_{n,l_n}}$  zum Knoten  $P_1$ .
- Vom Knoten  $P_i$  führt eine Kante zum Eingang  $\bar{p}_{i,1}$  des Teilgraphen  $K_{\bar{k}_{i,1}}$ .
- Für alle  $1 \leq j < \bar{l}_i$  führt eine Kante vom Ausgang  $\bar{p}_{i,j}$  des Teilgraphen  $K_{\bar{k}_{i,j}}$  zum Eingang  $\bar{p}_{i,j+1}$  des Teilgraphen  $K_{\bar{k}_{i,j+1}}$ .

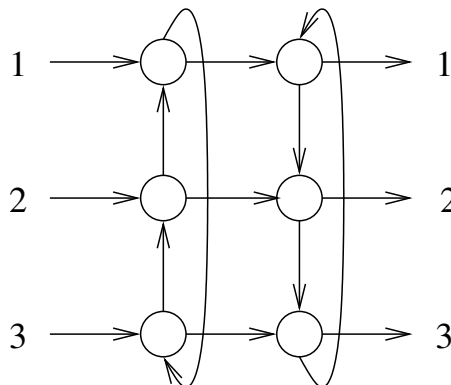


Abbildung 1: Kodierung von Klauseln

- Ist  $i < n$ , so führt eine Kante vom Ausgang  $\bar{p}_{i,\bar{l}_i}$  des Teilgraphen  $K_{\bar{k}_i,\bar{l}_i}$  zum Knoten  $P_{i+1}$ .
- Es führt eine Kante vom Ausgang  $\bar{p}_{n,\bar{l}_n}$  des Teilgraphen  $K_{\bar{k}_n,\bar{l}_n}$  zum Knoten  $P_1$ .
- Ist  $l_i = 0$  bzw.  $\bar{l}_i = 0$ , d.h.  $P_i$  hat kein positives bzw. negatives Vorkommen, so führt eine Kante direkt von  $P_i$  zu  $P_{i+1}$  falls  $i < n$ , bzw. von  $P_i$  zu  $P_1$  falls  $i = n$ .

Die Formel  $F$  ist erfüllt, wenn jede Klausel erfüllt ist. Dies bedeutet wiederum, daß mindestens ein Literal in jeder Klausel erfüllt sein muß, d.h. es muß einen Hamilton-Kreis geben, der jeden Teilgraphen  $K_j$  mindestens einmal (und maximal dreimal) passiert. Auf dem Weg von Knoten  $P_i$  nach  $P_{i+1}$  werden dabei entweder alle Teilgraphen  $K_i$  passiert, die den Klauseln entsprechen, in denen  $P_i$  *positiv* vorkommt, oder alle, die den Klauseln entsprechen, in denen  $P_i$  *negativ* vorkommt.

In Abbildung 2 ist der Graph abgebildet, der der Formel

$$(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$$

entspricht. Die gestrichelten Linien stellen einen Hamilton-Kreis dar, der der erfüllenden Belegung  $\mathcal{I}$  mit

$$\mathcal{I}(P) = T, \quad \mathcal{I}(Q) = F, \quad \mathcal{I}(R) = F$$

entspricht.

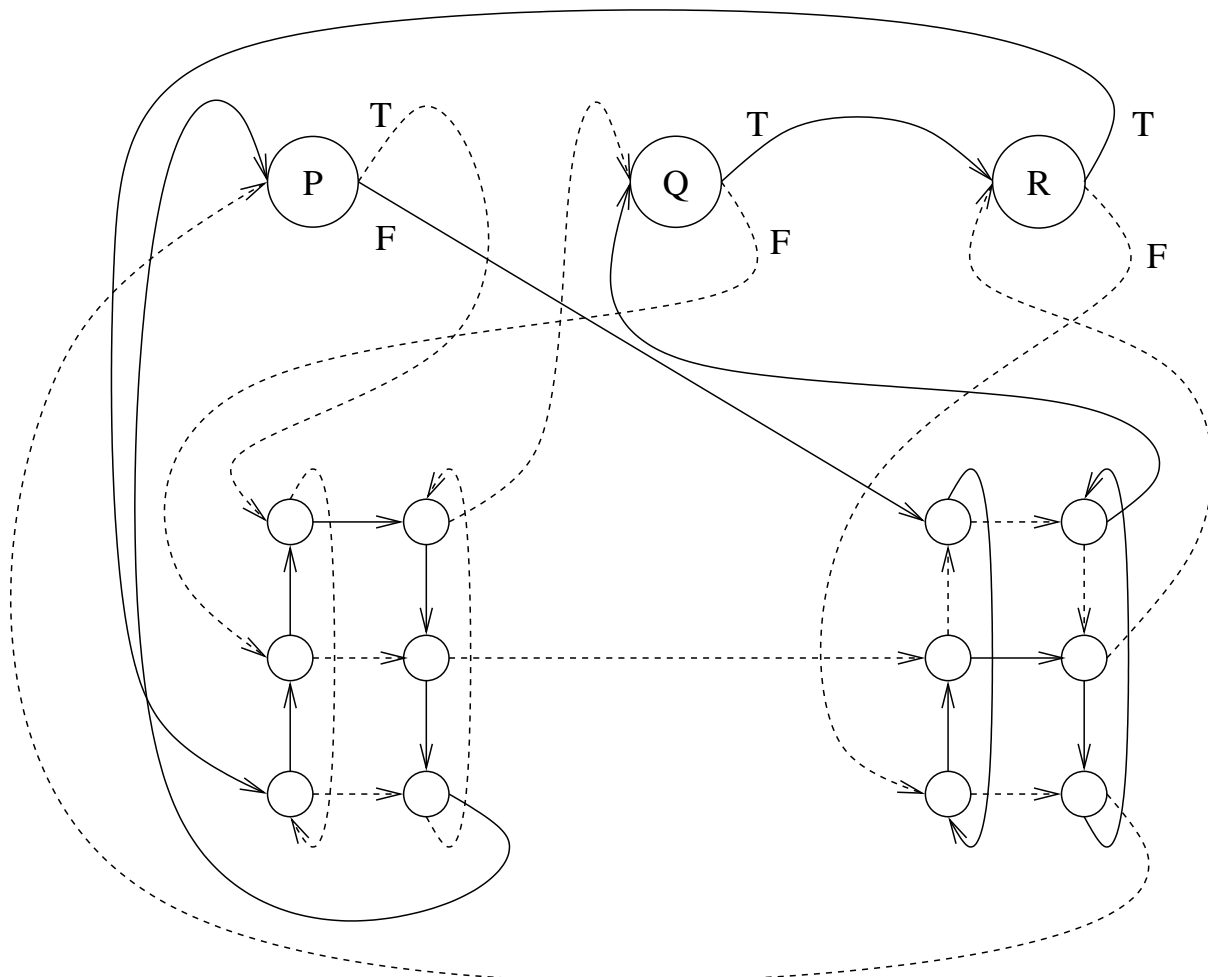


Abbildung 2: Kodierung der Formel  $(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$