

Prolog

In der ersten Übung am 15. April 2005 wird eine Einführung in die Programmiersprache PROLOG gegeben.

Aufgabe 1 (Ü) (*Relationen: Produkt, Bild, inverses Bild*)

Eine *zweistellige Relation* R auf Mengen X und Y ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts von X und Y :

$$R \subseteq X \times Y$$

Für $(x, y) \in R$ schreibt man oft $x R y$.

Sei $S = \{G, U, O, KS, MP\}$ eine Menge von Stationen aus dem Münchner U- und S-Bahn-Netz. Die Relation $V \subseteq S \times S$ mit

$$V = \{(G, U), (U, G), (U, O), (O, U), (O, KS), (O, MP), \\ (KS, O), (KS, MP), (MP, O), (MP, KS)\}$$

gibt einen Ausschnitt aus dem Liniennplan an.

- a) Sei R eine Relation auf X und Y und Q ein Relation auf Y und Z . Dann ist das *Produkt* $R \circ Q$ eine Relation auf X und Z , und wie folgt definiert:

$$R \circ Q = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y. x R y \wedge y Q z\}$$

Berechnen Sie die Relation $V \circ V$.

- b) Sei R eine zweistellige Relation auf X und Y , $M \subseteq X$ und $N \subseteq Y$. Dann ist das (*direkte*) *Bild* RM von M unter R definiert als folgende Teilmenge von Y :

$$RM = \{y \in Y \mid \exists m \in M. m R y\}$$

Das *inverse Bild* $R^{-1}N$ von N unter R ist definiert als folgende Teilmenge von X :

$$R^{-1}N = \{x \in X \mid \exists n \in N. x R n\}$$

Seien $M = \{U, KS\} \subseteq S$ und $N = \{G, U, MP\} \subseteq S$. Bestimmen Sie die Mengen VM und $V^{-1}N$.

Aufgabe 2 (Ü) (*Große Vereinigung, Hüllenbildung*)

Die *große Vereinigung* $\bigcup K$ einer Menge K von Mengen ist definiert als:

$$\bigcup K = \{a \mid \exists M \in K. a \in M\}$$

Wenn $K = \{K_i \mid i \in I\}$ eine bzgl. der Indexmenge I indizierte Menge ist, schreibt man statt $\bigcup K$ auch $\bigcup_{i \in I} K_i$.

Sei $R \subseteq X \times X$ eine Relation auf der Menge X und sei $Id_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ die *Identitäts-Relation* auf X . Die *n-fache Iteration* der Relation R ist induktiv definiert als:

$$R^0 = Id_X \qquad R^{n+1} = R^n \circ R$$

Die *transitive Hülle* R^+ der Relation R ist definiert als:

$$R^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^{n+1}$$

Die *transitive und reflexive Hülle* R^* der Relation R ist definiert als:

$$R^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n$$

- a) Aufgrund von Sparmaßnahmen der Staatsregierung sehen sich die Verkehrsbetriebe zu einer drastischen Preiserhöhung gezwungen. Insbesondere gilt für Streifenkarten, dass pro Streifen nur noch eine Station weit gefahren werden darf. Eine genaue Planung der Fahrtroute ist also angebracht.

Geben Sie für die Verbindungsrelation V aus Aufgabe 1 die Relationen V^0 , V^1 , V^2 und V^3 an.

- b) Geben Sie die Relation V^* an.

Wie viele Streifen reichen also aus, um von jedem Punkt in V zu jedem anderen Punkt zu kommen?