Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Dr. Clemens Ballarin

Vorlesung Semantik
Sommersemester 2007
Übungsblatt 1
Besprechung am 24. April 2007

Hinweise zum Übungsbetrieb

Auf den Übungsblättern finden Sie Hausaufgaben (H), Programmieraufgaben (P) und Übungsaufgaben (Ü). Haus- und Programmieraufgaben können sie abgeben und werden korrigiert. Abgabe der Lösungen ist jeweils montags 12 Uhr. Aufgaben, bei denen es Schwierigkeiten gab, werden in der Übung besprochen.

Die Sprechstunde der Übungsleitung ist dienstags von 11–12 Uhr im Raum FMI 01.11.061 oder nach Vereinbarung. Abgabe der Hausaufgaben in der Vorlesung am Montag, oder im Postfach in Raum 01.11.035.

Für die Programmieraufgaben brauchen Sie einen Zugang zur Sunhalle. Hinweise zu Eclipse-Prolog finden sie in der Datei /usr/proj/semantik/prolog/hinweise.txt. *Hinweis:* das Verzeichnis /usr/proj/semantik wird im Dateisystem automatisch hinzugefügt (*mount*), wenn Sie

```
cd /usr/proj/semantik
```

eingeben.

Aufgabe 1 (H) (*Relationen: Produkt, Bild, inverses Bild*)

Eine *zweistellige Relation* R auf Mengen X und Y ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts von X und Y:

$$R \subseteq X \times Y$$

Für $(x, y) \in R$ schreibt man oft $x\,R\,y$.

Sei $S = \{\mathrm{G}, \mathrm{U}, \mathrm{O}, \mathrm{KS}, \mathrm{MP}\}$ eine Menge von Stationen aus dem Münchner U- und S-Bahn-Netz. Die Relation $V \subseteq S \times S$ mit

$$V = \{(\mathrm{G}, \mathrm{U}), (\mathrm{U}, \mathrm{G}), (\mathrm{U}, \mathrm{O}), (\mathrm{O}, \mathrm{U}), (\mathrm{O}, \mathrm{KS}), (\mathrm{O}, \mathrm{MP}),\\ (\mathrm{KS}, \mathrm{O}), (\mathrm{KS}, \mathrm{MP}), (\mathrm{MP}, \mathrm{O}), (\mathrm{MP}, \mathrm{KS})\}$$

gibt einen Ausschnitt aus dem Linienplan an.

a) Sei R eine Relation auf X und Y und Q ein Relation auf Y und Z. Dann ist das *Produkt* $R \circ Q$ eine Relation auf X und Z, und wie folgt definiert:

$$R \circ Q = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y.\; x\,R\,y \wedge y\,Q\,z\}$$

Berechnen Sie die Relation $V \circ V$.

b) Sei R eine zweistellige Relation auf X und Y, $M \subseteq X$ und $N \subseteq Y$. Dann ist das *(direkte) Bild* $R\,M$ von M unter R definiert als folgende Teilmenge von Y:

$$R\,M = \{y \in Y \mid \exists m \in M.\; m\,R\,y\}$$

Das *inverse Bild* $R^{-1}\,N$ von N unter R ist definiert als folgende Teilmenge von X:

$$R^{-1}\,N = \{x \in X \mid \exists n \in N.\ x\,R\,n\}$$

Seien $M = \{\mathrm{U}, \mathrm{KS}\} \subseteq S$ und $N = \{\mathrm{G}, \mathrm{U}, \mathrm{MP}\} \subseteq S$. Bestimmen Sie die Mengen $V\,M$ und $V^{-1}\,N$.

Aufgabe 2 (H) (*Mengensysteme*)

Eine Menge von Mengen heisst auch *Mengensystem*. Die *große Vereinigung* $\bigcup K$ eines Mengensystems K ist definiert als:

$$\bigcup K = \{x \mid \exists M \in K.\ x \in M\}$$

Alternative Schreibweisen für $\bigcup K$ sind: $\bigcup_{M\in K} M$ und, wenn $K = \{K_i \mid i \in I\}$ eine bzgl. der Indexmenge I indizierte Menge ist: $\bigcup_{i\in I} K_i$.

Sei A eine Menge und K ein nichtleeres Mengensystem. Zeigen Sie, dass gilt:

$$A \cup \left(\bigcup K\right) = \bigcup_{B\in K} (A \cup B)$$

Aufgabe 3 (H) (*Hüllenbildung*)

Sei $R \subseteq X \times X$ eine Relation auf der Menge X und sei $\mathit{Id}_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ die *Identitäts-Relation* auf X. Die n*-fache Iteration* der Relation R ist induktiv definiert als:

$$R^0 = \mathit{Id}_X \qquad\qquad R^{n+1} = R^n \circ R$$

Die *transitive Hülle* R^+ der Relation R ist definiert als:

$$R^+ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^{n+1}$$

Die *transitive und reflexive Hülle* R^* der Relation R ist definiert als:

$$R^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n$$

a) Aufgrund von Sparmaßnahmen der Staatsregierung sehen sich die Verkehrsbetriebe zu einer drastischen Preiserhöhung gezwungen. Insbesondere gilt für Streifenkarten, dass pro Streifen nur noch eine Station weit gefahren werden darf. Eine genaue Planung der Fahrtroute ist also angebracht.

   Geben Sie für die Verbindungsrelation V aus Aufgabe 1 die Relationen V^0, V^1, V^2 und V^3 an.

b) Geben Sie die Relation V^* an.

   Wie viele Streifen reichen also aus, um von jedem Punkt in V zu jedem anderen Punkt zu kommen?