
Einführung in die Theoretische Informatik

Hinweis: Bitte beachten Sie unbedingt die Hinweise zum Übungsablauf und zu den Aufgabentypen auf der THEO-Website (<http://theo.in.tum.de/>).

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $A = \{aa, b\}$. Geben Sie jeweils, wenn möglich, mindestens 3 Wörter an, die innerhalb bzw. außerhalb der folgenden Sprachen liegen.

1. $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in A^2 : w = u^3\}$.
2. $L_2 = \{(a^2b^n)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
3. $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid w^2 = w^4\}$.
4. $L_4 = \{w \in A^* \mid |w| \leq 2\}$.
5. $L_5 = \{(ab)^m(bb)^n \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ und } n < m\}$.

Lösungsvorschlag

1. $A^2 = \{aaaa, aab, baa, bb\}$.
Damit ist $L_1 = \{a^{12}, aabaabaab, baabaabaa, b^6\}$.
Beispiele für Wörter in $\Sigma^* \setminus L_1$ sind $\epsilon, a, aaabbb$.
2. $\{\epsilon, aab, aabbaabb\} \subseteq L_2$.
 $\{a, ab, ba\} \subseteq \Sigma^* \setminus L_2$.
3. Aufgrund des Längenvergleichs ergibt sich $L_3 = \{\epsilon\}$.
D. h., alle Wörter aus Σ^+ sind nicht in L_3 .
4. $L_4 = \{\epsilon, b, aa, bb\}$.
 $\{ab, a, aaaa\} \subseteq \Sigma^* \setminus L_4$.
5. $\{ab, ababbb, abababbb\} \subseteq L_5$.
 $\{\epsilon, a, b\} \subseteq \Sigma^* \setminus L_5$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet. Zeigen Sie für alle Sprachen $A, B, C \subseteq \Sigma^*$

1. $A^* \subseteq A^*A \implies \epsilon \in A$,
2. $A^+ \subseteq A^+A \implies (\epsilon \in A \vee A = \emptyset)$,
3. $A(BC) = (AB)C$ („Assoziativität der Konkatenation“).

Lösungsvorschlag

1. Sei $A^* \subseteq A^*A$.
Wegen $\epsilon \in A^*$ (nach Def.) ist ϵ auch in A^*A . Es folgt $\epsilon = uv$ mit $u \in A^*$ und $v \in A$. Dann muss aber sowohl $u = \epsilon$ als auch $v = \epsilon$ sein und folglich $\epsilon \in A$.
2. Wir betrachten die Abbildung Min , die jeder nichtleeren Sprache die Länge des kürzesten Wortes zuordnet.

Dann gilt offensichtlich für beliebige nichtleere Sprachen L_1, L_2 :

$$\begin{aligned} Min(L_1L_2) &= Min(L_1) + Min(L_2) \\ L_1 \subseteq L_2 &\implies Min(L_1) \geq Min(L_2) \end{aligned}$$

Es ergibt sich also für $A \neq \emptyset$:

$$Min(A^+) \geq Min(A^+A) = Min(A^+) + Min(A)$$

Das ist nur möglich wenn $Min(A) = 0$ und somit $\epsilon \in A$.

3.

$$\begin{aligned} u \in A(BC) &\iff u = v(xy) \quad \text{für bestimmte } v \in A, x \in B, y \in C \\ &\iff u = (vx)y \quad \text{für bestimmte } v \in A, x \in B, y \in C \\ &\iff u \in (AB)C. \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Assoziativität der Konkatenation von Wörtern entscheidend ist, was aber aufgrund der suggestiven Notation (“hintereinanderschreiben”) kaum auffällt.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet und $\mathcal{L}_\Sigma = \mathcal{P}(\Sigma^*)$ die Menge aller formalen Sprachen über Σ .

1. Als welche algebraische Struktur (Halbgruppe, Monoid, Gruppe, Ring, Körper) kann man $\langle \Sigma^*, \cdot \rangle$ ansehen, wenn \cdot die Konkatenation von *Wörtern* bezeichnet. Gesucht ist die stärkste der angegebenen Strukturen. Beweisen Sie Ihre Behauptung. Zeigen Sie auch, dass die nächststärkere Struktur nicht vorliegt.
2. Zeigen Sie, dass $\langle \mathcal{L}_\Sigma, \circ \rangle$ die gleiche Struktur hat, wenn \circ die Konkatenation von *Sprachen* bezeichnet.

Lösungsvorschlag

1. $\langle \Sigma^*, \cdot \rangle$ ist ein Monoid, da Σ^* unter Konkatenation abgeschlossen ist, die Konkatenation assoziativ ist, und das leere Wort als neutrales Element besitzt: $w\epsilon = \epsilon w = w$. Eine Gruppe liegt nicht vor: Ein nichtleeres Wort $w \in \Sigma^+$ besitzt niemals ein Inverses, da stets $|wv| \geq |w| > 0$ und somit $wv \neq \epsilon$ ist.
2. $\langle \mathcal{L}_\Sigma, \circ \rangle$ ist ebenfalls ein Monoid. Die Assoziativität wurde in Aufgabe 2 gezeigt. Das neutrale Element ist in diesem Fall die einelementige Sprache $\{\epsilon\}$.

Randbemerkung: Betrachtet man außerdem die Vereinigung \cup als zweite Operation, dann bildet die Struktur $\langle \mathcal{L}_\Sigma, \cup, \circ \rangle$ einen abgeschlossenen Halbring.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Eine Menge M heißt abzählbar, wenn sie sich bijektiv auf eine Teilmenge der natürlichen Zahlen abbilden lässt. Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Zeigen Sie durch Konstruktion einer geeigneten Abbildung, dass Σ^* abzählbar ist.

Lösungsvorschlag

Nach Vorlesung ist eine Menge genau dann abzählbar, wenn sie sich bijektiv auf eine Teilmenge der natürlichen Zahlen abbilden lässt. Zum Beweis der Abzählbarkeit genügt es also, eine injektive Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ anzugeben wie folgt.

Sei $|\Sigma| = 3$. Wir nummerieren die Buchstaben $x \in \Sigma$ beliebig von 1 bis 3, die Nummern bezeichnen wir als $z(x)$. Dann kann man jedem Wort $w = x_1x_2 \dots x_n$ mit $x_i \in \Sigma$ die folgende natürliche Zahl $f(w)$ zuordnen.

$$f(w) = \sum_{i=1}^n z(x_i) \cdot 3^{i-1}.$$

Dem leeren Wort ϵ wird die Zahl 0 zugeordnet.

Somit wird ein Wort genau als Zahl zur Basis 3 aufgefasst. Offenbar ist f injektiv.

Hinweis: Damit die Codierung so funktioniert ist es wichtig, dass $z(x)$ nie null ist, denn sonst wäre die Darstellung bei führenden Nullen nicht mehr eindeutig.

Vorbereitung 1

1. Seien $A = \{\epsilon, a, ab\}$ und $B = \{a, ba\}$. Bestimmen Sie $|A^2|$, $|AB|$ und $|BA|$.
2. Seien $A, B, C, D \subseteq \Sigma^*$ mit $A \subseteq C$ und $B \subseteq D$. Zeigen Sie

$$AB \subseteq CD.$$

Erinnerung: Eine Teilmengenbeziehung $M \subseteq N$ zeigt man, indem man ein $w \in M$ annimmt und dann zeigt, dass $w \in N$ gilt.

Lösungsvorschlag

1. $|A^2| = |\{\epsilon, a, ab\}\{\epsilon, a, ab\}| = |\{\epsilon, a, ab, a^2, a^2b, aba, abab\}| = 7$.
 $|AB| = |\{\epsilon, a, ab\}\{a, ba\}| = |\{a, ba, a^2, aba, ab^2a\}| = 5$.
 $|BA| = |\{a, ba\}\{\epsilon, a, ab\}| = |\{a, a^2, a^2b, ba, ba^2, ba^2b\}| = 6$.
2. Sei $w \in AB$. Dann muss w aus zwei Teilwörtern u, v bestehen, also $w = uv$ mit $u \in A$ und $v \in B$. Nach Voraussetzung ist dann auch $u \in C$ und $v \in D$. Somit ist $w = uv \in CD$.

Vorbereitung 2

Wir betrachten einen DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, der wie folgt gegeben ist:

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\},$$

$$\Sigma = \{0, 1\},$$

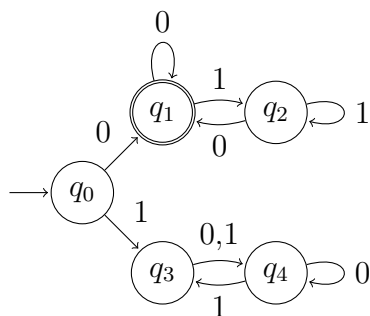
$$\delta = \{(q_0, 0) \mapsto q_1, (q_0, 1) \mapsto q_3, \\ (q_1, 0) \mapsto q_1, (q_1, 1) \mapsto q_2, \\ (q_2, 0) \mapsto q_1, (q_2, 1) \mapsto q_2, \\ (q_3, 0) \mapsto q_4, (q_3, 1) \mapsto q_4, \\ (q_4, 0) \mapsto q_4, (q_4, 1) \mapsto q_3\},$$

$$F = \{q_1\}.$$

1. Zeichnen Sie den Automaten als Zustandsgraph.
2. Bestimmen Sie $\delta(\delta(q_1, 0), 1)$ und $\hat{\delta}(q_1, 10)$!
3. Geben Sie ein möglichst einfaches Kriterium an, mit dem man entscheiden kann, ob ein Wort $w \in \Sigma^*$ von A akzeptiert wird.

Lösungsvorschlag

1.



2. $\delta(\delta(q_1, 0), 1) = \delta(q_1, 1) = q_2$,
 $\hat{\delta}(q_1, 10) = \hat{\delta}(\delta(q_1, 1), 0) = \hat{\delta}(q_2, 0) = \hat{\delta}(\delta(q_2, 0), \epsilon) = \delta(q_2, 0) = q_1$.

3. Wörter, die mit 1 beginnen, werden nicht akzeptiert, weil in dem betreffenden Zweig kein Endzustand erreichbar ist. Andererseits endet offenbar jedes Wort, das in den Endzustand führt, mit dem Zeichen 0.

Wir vermuten, dass alle diejenigen Wörter akzeptiert werden, die mit 0 beginnen und mit 0 enden.

Sei $w = 0u0$ ein Wort mit $u \in \Sigma^*$. Die Eingabe von 0 führt in den Zustand q_1 . Von q_1 aus kommt man bei beliebiger Eingabe nur entweder nach q_1 oder q_2 . Gleich wo man gelandet ist, führt die Eingabe von 0 wieder in den Endzustand q_1 . D. h., dass w akzeptiert wird.

Tutoraufgabe 1

Sei Σ ein Alphabet und $A, B \subset \Sigma^*$ formale Sprachen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $A \subseteq B \implies A^n \subseteq B^n$
2. $A \subseteq B \implies A^* \subseteq B^*$
3. $|A \times A| = |AA|$
4. $A^*A^* = A^*$
5. $(B \setminus A)^* \cup A^* = B^*$

Lösungsvorschlag

1. Wir nehmen die Prämisse $A \subseteq B$ an und beweisen die Aussage $A^n \subseteq B^n$ durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

$n = 0$: Es gilt $A^0 = \{\epsilon\} \subseteq \{\epsilon\} = B^0$.

$n \rightarrow n + 1$: Wir nehmen $A^n \subseteq B^n$ an. Dann gilt $A^{n+1} = \underbrace{AA^n \subseteq BB^n}_{\text{da } A \subseteq B \text{ und } A^n \subseteq B^n} = B^{n+1}$.

Hier haben wir die Monotoniebeziehung aus der Vorbereitungsaufgabe verwendet.

2. Sei $A \subseteq B$. Wir zeigen $x \in A^* \implies x \in B^*$.

Für ein $x \in A^*$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $x \in A^n$. Mit Teilaufgabe 1 folgt $x \in B^n \subseteq B^*$.

3. Die Gleichung gilt nicht für alle A . Sei z.B. $\Sigma = \{a\}$ und $A = \{\epsilon, a\} \subseteq \Sigma^*$.

Dann gilt $|A \times A| = |\{(\epsilon, \epsilon), (\epsilon, a), (a, \epsilon), (a, a)\}| = 4$.

Andererseits gilt $|AA| = |\{\epsilon\epsilon, \epsilon a, a\epsilon, aa\}| = |\{\epsilon, a, aa\}| = 3$.

Hier ist der bedeutende Unterschied, dass die Sprachen-Konkatenation assoziativ ist, das kartesische Produkt \times jedoch nicht.

Falls A nicht leer ist, gilt sogar $A \times (A \times A) \neq (A \times A) \times A$.

4. Da stets $\epsilon \in A^*$, folgt offenbar $A^* \subseteq A^*A^*$. Für die Gegenrichtung $A^*A^* \subseteq A^*$, sei $w \in A^*A^*$. Dann gibt es $u, v \in \Sigma^*$ und $m, n \in \mathbb{N}$ so dass $w = uv$ und $u \in A^m$ und $v \in A^n$. Dann ist $w \in A^{n+m}$ und somit $w \in A^*$.

5. Sei $B = \{a, b\}$ und $A = \{a\}$.

Dann gilt $B \setminus A = \{b\}$ und es folgt

$$(B \setminus A)^* \cup A^* = \{b\}^* \cup \{a\}^* \neq B^*$$

Die obige Ungleichung gilt, da z.B. $ab \in B^*$, aber $ab \notin \{b\}^* \cup \{a\}^*$.

Es gibt auch andere einfache Gegenbeispiele, z.B. $A = \{a\}$, $B = \emptyset$.

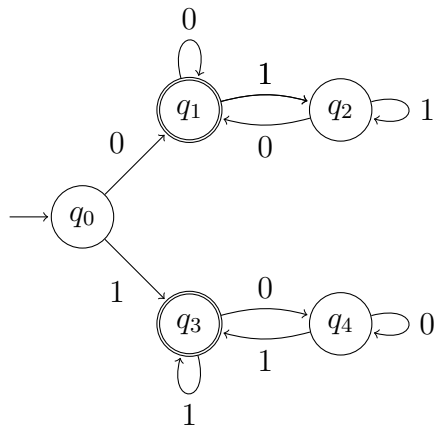
Tutoraufgabe 2

Wir betrachten die Sprache L aller Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, die entweder mit 1 beginnen und mit 1 enden oder mit 0 beginnen und mit 0 enden.

1. Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten (DFA) an, der L akzeptiert.
2. Geben Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten (NFA) mit höchstens 4 Zuständen an, der L akzeptiert.

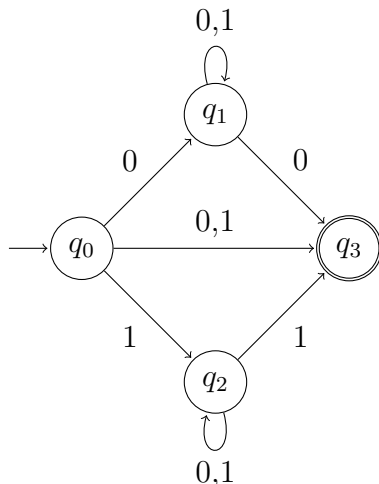
Lösungsvorschlag

1. Entsprechender (minimaler) deterministischer Automat:



q_i	$\delta(q_i, 0)$	$\delta(q_i, 1)$
q_0	q_1	q_3
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2
q_3	q_3	q_4
q_4	q_3	q_4

2. Nichtdeterministischer Automat, der L akzeptiert:



q_i	$\delta(q_i, 0)$	$\delta(q_i, 1)$
q_0	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$
q_1	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2, q_3\}$
q_3	\emptyset	\emptyset