
Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 3. Mai 2010 vor 10.15 Uhr in die THEO Briefkästen

Hinweis: Bitte beachten Sie unbedingt die Hinweise zum Übungsablauf und zu den Aufgabentypen auf der THEO-Website (<http://theo.in.tum.de/>).

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $A = \{aa, b\}$. Geben Sie jeweils, wenn möglich, mindestens 3 Wörter an, die innerhalb bzw. außerhalb der folgenden Sprachen liegen.

1. $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in A^2 : w = u^3\}$.
2. $L_2 = \{(a^2b^n)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
3. $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid w^2 = w^4\}$.
4. $L_4 = \{w \in A^* \mid |w| \leq 2\}$.
5. $L_5 = \{(ab)^m(bb)^n \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ und } n < m\}$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet. Zeigen Sie für alle Sprachen $A, B, C \subseteq \Sigma^*$

1. $A^* \subseteq A^*A \implies \epsilon \in A$,
2. $A^+ \subseteq A^+A \implies (\epsilon \in A \vee A = \emptyset)$,
3. $A(BC) = (AB)C$ („Assoziativität der Konkatenation“).

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet und $\mathcal{L}_\Sigma = \mathcal{P}(\Sigma^*)$ die Menge aller formalen Sprachen über Σ .

1. Als welche algebraische Struktur (Halbgruppe, Monoid, Gruppe, Ring, Körper) kann man $\langle \Sigma^*, \cdot \rangle$ ansehen, wenn \cdot die Konkatenation von *Wörtern* bezeichnet. Gesucht ist die stärkste der angegebenen Strukturen. Beweisen Sie Ihre Behauptung. Zeigen Sie auch, dass die nächststärkere Struktur nicht vorliegt.
2. Zeigen Sie, dass $\langle \mathcal{L}_\Sigma, \circ \rangle$ die gleiche Struktur hat, wenn \circ die Konkatenation von *Sprachen* bezeichnet.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Eine Menge M heißt abzählbar, wenn sie sich bijektiv auf eine Teilmenge der natürlichen Zahlen abbilden läßt. Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Zeigen Sie durch Konstruktion einer geeigneten Abbildung, dass Σ^* abzählbar ist.

Vorbereitung 1

1. Seien $A = \{\epsilon, a, ab\}$ und $B = \{a, ba\}$. Bestimmen Sie $|A^2|$, $|AB|$ und $|BA|$.
2. Seien $A, B, C, D \subseteq \Sigma^*$ mit $A \subseteq C$ und $B \subseteq D$. Zeigen Sie

$$AB \subseteq CD.$$

Erinnerung: Eine Teilmengenbeziehung $M \subseteq N$ zeigt man, indem man ein $w \in M$ annimmt und dann zeigt, dass $w \in N$ gilt.

Vorbereitung 2

Wir betrachten einen DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, der wie folgt gegeben ist:

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\},$$

$$\Sigma = \{0, 1\},$$

$$\delta = \{(q_0, 0) \mapsto q_1, (q_0, 1) \mapsto q_3, \\ (q_1, 0) \mapsto q_1, (q_1, 1) \mapsto q_2, \\ (q_2, 0) \mapsto q_1, (q_2, 1) \mapsto q_2, \\ (q_3, 0) \mapsto q_4, (q_3, 1) \mapsto q_4, \\ (q_4, 0) \mapsto q_4, (q_4, 1) \mapsto q_3\},$$

$$F = \{q_1\}.$$

1. Zeichnen Sie den Automaten als Zustandsgraph.
2. Bestimmen Sie $\delta(\delta(q_1, 0), 1)$ und $\hat{\delta}(q_1, 10)$!
3. Geben Sie ein möglichst einfaches Kriterium an, mit dem man entscheiden kann, ob ein Wort $w \in \Sigma^*$ von A akzeptiert wird.

Tutoraufgabe 1

Sei Σ ein Alphabet und $A, B \subseteq \Sigma^*$ formale Sprachen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $A \subseteq B \implies A^n \subseteq B^n$
2. $A \subseteq B \implies A^* \subseteq B^*$
3. $|A \times A| = |AA|$
4. $A^*A^* = A^*$
5. $(B \setminus A)^* \cup A^* = B^*$

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten die Sprache L aller Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, die entweder mit 1 beginnen und mit 1 enden oder mit 0 beginnen und mit 0 enden.

1. Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten (DFA) an, der L akzeptiert.
2. Geben Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten (NFA) mit höchstens 4 Zuständen an, der L akzeptiert.