
Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 5. Juli 2010 vor 12.00 Uhr in die THEO Briefkästen

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Die konstante Funktion $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $k(y) = 0$ darf nicht mit der Konstanten 0 gleichgesetzt werden. Zeigen Sie durch syntaktisch korrekte Anwendung der Aufbauregeln für primitive Rekursion, dass $k(y)$ primitiv rekursiv ist.

Sie dürfen annehmen, dass das Schema $f(0) = g(), f(m+1) = h(f(m), m)$ ein Spezialfall des Schemas $f(0, \bar{x}) = g(\bar{x}), f(m+1, \bar{x}) = h(f(m, \bar{x}), m, \bar{x})$ ist.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie mit den gleichen Hilfsmitteln wie in der nachfolgenden Aufgabe: Falls das Prädikat $P(x, y, z)$ primitiv rekursiv ist, dann ist auch der beschränkte max-Operator

$$Q(m, n) := \max\{k \leq m \mid P(m, n, k)\}$$

primitiv rekursiv.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen Sie die primitive Rekursivität der folgenden Funktionen *noteq* und *Div* unter Beachtung der entsprechenden Hinweise:

1. Das 2-stellige Prädikat $noteq(m, n)$, das einem Paar $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ den Wert 1 zuordnet, falls $m \neq n$ gilt, und andernfalls den Wert 0 besitzt.
2. Die Funktion $Div(m, n)$, die für $n = 0$ den Wert 0 hat und andernfalls durch ganzzahlige Division definiert ist, wie folgt:

$$Div(m, n) = \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor.$$

Hinweise: Sie dürfen zusätzlich zu den Basisfunktionen der primitiven Rekursion die erweiterte Komposition und das erweiterte rekursive Definitionsschema benutzen. Die in der Vorlesung behandelten primitiv rekursiven Funktionen dürfen Sie ebenfalls benutzen. LOOP-Programme sind nicht erlaubt.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ diejenige Funktion, die definiert ist durch die Startwerte $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 1$ zusammen mit der Rekursion

$$f(n+1) = f(n-1)^2 f(n-2)^2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass f primitiv-rekursiv ist.

Vorbereitung 1

Im Folgenden bezeichne $a(n, m)$ die Ackermann-Funktion.

1. Berechnen Sie $a(1, 6)$ und $a(2, 1)$.
2. Zeigen Sie für alle $n, m \in \mathbb{N}$:
 - (i) $a(1, m) = m + 2$,
 - (ii) $m < a(n, m)$.

Vorbereitung 2

Welche Aussagen sind wahr? Geben Sie jeweils eine knappe Begründung an.

1. Jede unentscheidbare Sprache enthält eine entscheidbare Teilmenge.
2. Jede Teilmenge einer entscheidbaren Sprache ist entscheidbar.
3. Für jede unentscheidbare Sprache A gibt es eine echte Obermenge, die ebenfalls unentscheidbar ist.
4. Aus 'A entscheidbar' und 'A ∩ B entscheidbar' folgt 'B entscheidbar'.

Vorbereitung 3

1. Falls A auf B mit Funktion f reduzierbar ist, dann gilt $f^{-1}(B) = A$, aber nicht notwendigerweise $f(A) = B$. Beweis!
2. Falls A reduzierbar auf B und B semi-entscheidbar ist, dann ist auch A semi-entscheidbar. Beweis!
3. Sei $B \subseteq \Sigma^*$ mit $B \neq \Sigma^*$ und $B \neq \emptyset$ entscheidbar. Zeigen Sie: B ist reduzierbar auf $\Sigma^* \setminus B$.

Tutoraufgabe 1

Wir wollen mit primitiver Rekursion eine Kodierung von Binärbäumen in natürliche Zahlen programmieren.

Dafür sollen primitiv rekursive Funktionen

$$\begin{array}{ll} leaf : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & branch : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ isleaf : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} & value : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ left : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & right : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ nleft : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & \end{array}$$

definiert werden.

Dabei repräsentiert $leaf(n)$ ein Blatt mit dem Wert n , und $branch(s, t)$ einen inneren Knoten mit linkem Teilbaum s und rechtem Teilbaum t . Innere Knoten tragen keine Werte. Bei einem Blatt s soll $value(s)$ den Wert des Blattes liefern. Bei einem inneren Knoten s sollen $left(s)$ und $right(s)$ den linken bzw. rechten Teilbaum zurückgeben. Die

Funktion $nleft(n, t)$ soll den Baum zurückgeben, der sich ergibt, wenn man n mal die Funktion $left$ auf t anwendet.

1. Geben Sie mit Hilfe der Paarfunktion c aus der Vorlesung und den passenden Projektionen p_1 und p_2 primitiv rekursive Definitionen für $leaf$, $branch$, $isleaf$, $value$, $left$ und $right$, und zeigen Sie, dass folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} isleaf(leaf(n)) &= 1 & isleaf(branch(s, t)) &= 0 \\ value(leaf(n)) &= n \\ left(branch(s, t)) &= s & right(branch(s, t)) &= t \\ nleft(0, t) &= t & nleft(n + 1, t) &= left(nleft(n, t)) \end{aligned}$$

Gehen Sie strikt nach Definition 4.30 vor, und geben Sie jeweils die Instanz des Schemas der primitiven Rekursion bzw. Komposition an, die Sie verwenden.

2. Definieren Sie eine Funktion $leftmost : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, die für einen Baum den Wert des Blattes ermittelt, das am weitesten links steht. Was ist hier die Schwierigkeit?

Tutoraufgabe 2

Sei $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ die Ackermann-Funktion.

1. Zeigen Sie, dass $f(m, n) := (a(m, n))^2$ nicht primitiv rekursiv ist.
2. Zeigen Sie, dass $g(m, n) := \min(3, a(m, n))$ primitiv rekursiv ist.

Tutoraufgabe 3

Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit der folgenden Mengen und wenden Sie zum Beweis Techniken der Reduzierbarkeit eines Problems A auf ein Problem B an.

1. $H_{\Sigma^*} = \{w \mid M_w \text{ hält für alle Eingaben}\}$.
2. $H_I = \{w \mid M_w \text{ berechnet die Identitätsfunktion}\}$.
3. Sei $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $A = \{w \mid L(M_w) = L\}$ unentscheidbar.