

---

## Einführung in die Theoretische Informatik

---

Abgabetermin: 12. Juli 2010 vor 12.00 Uhr in die THEO Briefkästen

### Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Seien die Funktionen  $f_1, f_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  definiert durch

$$f_1(m, n) = n \div m^2 \quad \text{bzw.} \quad f_2(m, n) = m^2 \div n.$$

Stellen Sie die Funktionen  $g_1 = \mu f_1$  und  $g_2 = \mu f_2$  durch übliche Operationen über den reellen Zahlen dar und begründen Sie die Gültigkeit Ihrer Darstellungen.

### Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Wir betrachten die lexikographische Ordnung  $\prec$  auf Wörtern über  $\Sigma$ . Man beachte, dass für verschiedene Buchstaben  $a, b \in \Sigma$  und alle  $u, v \in \Sigma^*$  stets  $au \prec bv$  folgt, falls  $a \prec b$  gilt. Seien  $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$  eine totale und berechenbare Funktion und

$$L = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists u, v \in \Sigma^*. u \neq v, f(u) = f(v) \leq y\}.$$

Zeigen Sie: Wenn  $f$  monoton ist (d.h.  $u \prec v \implies f(u) \leq f(v)$ ), dann ist  $L$  entscheidbar.

Ist stets  $L = \emptyset$  entscheidbar?

### Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Ist es entscheidbar, ob bei der Ausführung

- (i) eines LOOP-Programms  $P$       (ii) eines WHILE-Programms  $P$

auf Eingabe 0, ein bestimmter Programmpunkt 50000 Mal erreicht wird? Begründen Sie Ihre Behauptung.

2. Wir betrachten eine modifizierte WHILE-Sprache, in der die Anzahl der Variablen auf 50000 beschränkt ist.

Ist das Halteproblem für solche WHILE-Programme entscheidbar? Begründung!

### Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sei  $\Sigma = \{0, 1\}$ .

1. Seien  $A, B \subseteq \Sigma^*$  und  $A$  sei reduzierbar auf  $B$ , i. Z.  $A \leq B$ . Beweisen oder widerlegen Sie: Wenn  $B$  regulär ist, dann ist auch  $A$  regulär.

2. Sei  $M_{w_0}$  eine Turingmaschine mit  $L(M_{w_0}) \neq \emptyset$ . Verwenden Sie Reduktion, um zu zeigen, dass die folgenden Mengen unentscheidbar sind:

- $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid M_w \text{ hält auf allen Eingaben aus } L(M_{w_0})\}$
- $L_2 = \{(v, w) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid L(M_v) = L(M_w)\}$

## Vorbereitung 1

Wir betrachten wieder die in der Vorlesung beschriebene Kodierung von Turingmaschinen durch Wörter über  $\Sigma^* = \{0, 1\}^*$ . Für ein  $w \in \Sigma^*$  beschreibt  $\varphi_w : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  dann die Funktion, die durch die Turingmaschine  $M_w$  berechnet wird. Finden Sie informelle Beschreibungen für die folgenden Mengen:

1.  $A = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w = \Omega\}$ .
2.  $B = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w(101) \neq \perp\}$ .
3.  $C = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w(\epsilon) = w\}$ .
4.  $D = \{(u, v, w) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^* \mid \varphi_u(w) = \varphi_v(w)\}$ .

## Vorbereitung 2

Sei  $\Sigma$  ein Alphabet. Ein Paar  $(l, r)$  mit  $l, r \in \Sigma^*$  nennen wir konsistent, falls  $l$  Präfix von  $r$  oder  $r$  Präfix von  $l$  ist. Sei  $P$  eine endliche Menge von Tupeln  $(x, y)$  mit  $x, y \in \Sigma^+$ . Dann nennen wir eine Folge von konsistenten Paaren  $(l_0, r_0), \dots, (l_k, r_k)$  eine Berechnung in  $P$ , falls es für alle  $i$  mit  $0 \leq i < k$  ein Paar  $(x, y) \in P$  gibt mit  $l_i x = l_{i+1}$  und  $r_i y = r_{i+1}$ , wobei auch  $(l_0, r_0) \in P$  gelten soll. Die Berechnung terminiert, wenn  $l_k = r_k$  gilt.

1. Machen Sie sich klar, dass es genau dann eine terminierende Berechnung in  $P$  gibt, wenn das Post'sche Korrespondenzproblem  $P$  lösbar ist.
2. Sei  $P = \{(1, 111), (10111, 10), (100, 00)\}$ . Geben Sie eine terminierende Berechnung an, die mit  $(10111, 10)$  beginnt. Welche Berechnungsschritte sind deterministisch?
3. Warum kann es nur triviale Berechnungen in  $P$  geben, wenn für ein bestimmtes  $n$  und für alle  $(x, y) \in P$  die Längenbedingung  $|x| = |y| = n$  gilt?

## Tutoraufgabe 1

1. Seien  $L_1$  und  $L_2$  rekursiv aufzählbare Mengen. Sind die folgenden Mengen  $L_a$  und  $L_b$  rekursiv aufzählbar? Beweisen Sie Ihre Antwort!

$$(i) \quad L_a = L_1 \cup L_2. \quad (ii) \quad L_b = \{x \mid x \in L_1 \Leftrightarrow x \in L_2\}.$$

2. Sei  $L_n \subseteq A$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  rekursiv aufzählbar. Zeigen Sie, dass dann auch

$$L = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$$

rekursiv aufzählbar ist.

3. Sei  $R \subseteq M \times M$  eine rekursiv aufzählbare Relation über einer Grundmenge  $M$ . Zeigen Sie, dass die transitive Hülle  $R^+$  von  $R$  rekursiv aufzählbar ist.

## Tutoraufgabe 2

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Rice:

1.  $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid L(M_w) \text{ ist kontextfrei}\}$  ist unentscheidbar.
2.  $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \forall n \in \mathbb{N}. \varphi_w(n) = 3n + 5\}$  ist unentscheidbar.

Warum kann man den Satz von Rice auf folgende Menge nicht anwenden?

3.  $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \forall n \in \mathbb{N}. \varphi_w(n) = \perp \text{ und } w \text{ ist ein Palindrom}\}$

## Tutoraufgabe 3

1. Zeigen Sie, dass die folgende Instanz  $P$  des Post'schen Korrespondenzproblems keine Lösung hat:

$$P = \{(10, 101), (011, 11), (101, 011)\}$$

2. Zeigen Sie, dass das Post'sche Korrespondenzproblem über einem Alphabet mit nur einem Symbol entscheidbar ist.