
Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 12. Juli 2010 vor 12.00 Uhr in die THEO Briefkästen

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Seien die Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$f_1(m, n) = n \div m^2 \quad \text{bzw.} \quad f_2(m, n) = m^2 \div n.$$

Stellen Sie die Funktionen $g_1 = \mu f_1$ und $g_2 = \mu f_2$ durch übliche Operationen über den reellen Zahlen dar und begründen Sie die Gültigkeit Ihrer Darstellungen.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Wir betrachten die lexikographische Ordnung \prec auf Wörtern über Σ . Man beachte, dass für verschiedene Buchstaben $a, b \in \Sigma$ und alle $u, v \in \Sigma^*$ stets $au \prec bv$ folgt, falls $a \prec b$ gilt. Seien $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ eine totale und berechenbare Funktion und $L = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists u, v \in \Sigma^*. u \neq v, f(u) = f(v) \leq y\}$.

Zeigen Sie: Wenn f monoton ist (d.h. $u \prec v \implies f(u) \leq f(v)$), dann ist L entscheidbar.

Ist stets $L = \emptyset$ entscheidbar?

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Ist es entscheidbar, ob bei der Ausführung

- (i) eines LOOP-Programms P (ii) eines WHILE-Programms P

auf Eingabe 0, ein bestimmter Programmpunkt 50000 Mal erreicht wird? Begründen Sie Ihre Behauptung.

2. Wir betrachten eine modifizierte WHILE-Sprache, in der die Anzahl der Variablen auf 50000 beschränkt ist.

Ist das Halteproblem für solche WHILE-Programme entscheidbar? Begründung!

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$.

1. Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ und A sei reduzierbar auf B , i. Z. $A \leq B$. Beweisen oder widerlegen Sie: Wenn B regulär ist, dann ist auch A regulär.

2. Sei M_{w_0} eine Turingmaschine mit $L(M_{w_0}) \neq \emptyset$. Verwenden Sie Reduktion, um zu zeigen, dass die folgenden Mengen unentscheidbar sind:

- $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid M_w \text{ hält auf allen Eingaben aus } L(M_{w_0})\}$
- $L_2 = \{(v, w) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid L(M_v) = L(M_w)\}$

Vorbereitung 1

Wir betrachten wieder die in der Vorlesung beschriebene Kodierung von Turingmaschinen durch Wörter über $\Sigma^* = \{0, 1\}^*$. Für ein $w \in \Sigma^*$ beschreibt $\varphi_w : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ dann die Funktion, die durch die Turingmaschine M_w berechnet wird. Finden Sie informelle Beschreibungen für die folgenden Mengen:

1. $A = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w = \Omega\}$.
2. $B = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w(101) \neq \perp\}$.
3. $C = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w(\epsilon) = w\}$.
4. $D = \{(u, v, w) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^* \mid \varphi_u(w) = \varphi_v(w)\}$.

Vorbereitung 2

Sei Σ ein Alphabet. Ein Paar (l, r) mit $l, r \in \Sigma^*$ nennen wir konsistent, falls l Präfix von r oder r Präfix von l ist. Sei P eine endliche Menge von Tupeln (x, y) mit $x, y \in \Sigma^+$. Dann nennen wir eine Folge von konsistenten Paaren $(l_0, r_0), \dots, (l_k, r_k)$ eine Berechnung in P , falls es für alle i mit $0 \leq i < k$ ein Paar $(x, y) \in P$ gibt mit $l_i x = l_{i+1}$ und $r_i y = r_{i+1}$, wobei auch $(l_0, r_0) \in P$ gelten soll. Die Berechnung terminiert, wenn $l_k = r_k$ gilt.

1. Machen Sie sich klar, dass es genau dann eine terminierende Berechnung in P gibt, wenn das Post'sche Korrespondenzproblem P lösbar ist.
2. Sei $P = \{(1, 111), (10111, 10), (100, 00)\}$. Geben Sie eine terminierende Berechnung an, die mit $(10111, 10)$ beginnt. Welche Berechnungsschritte sind deterministisch?
3. Warum kann es nur triviale Berechnungen in P geben, wenn für ein bestimmtes n und für alle $(x, y) \in P$ die Längenbedingung $|x| = |y| = n$ gilt?

Tutoraufgabe 1

1. Seien L_1 und L_2 rekursiv aufzählbare Mengen. Sind die folgenden Mengen L_a und L_b rekursiv aufzählbar? Beweisen Sie Ihre Antwort!

$$(i) \quad L_a = L_1 \cup L_2. \quad (ii) \quad L_b = \{x \mid x \in L_1 \Leftrightarrow x \in L_2\}.$$

2. Sei $L_n \subseteq A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbar. Zeigen Sie, dass dann auch

$$L = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$$

rekursiv aufzählbar ist.

3. Sei $R \subseteq M \times M$ eine rekursiv aufzählbare Relation über einer Grundmenge M . Zeigen Sie, dass die transitive Hülle R^+ von R rekursiv aufzählbar ist.

Tutoraufgabe 2

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Rice:

1. $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid L(M_w) \text{ ist kontextfrei}\}$ ist unentscheidbar.
2. $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \forall n \in \mathbb{N}. \varphi_w(n) = 3n + 5\}$ ist unentscheidbar.

Warum kann man den Satz von Rice auf folgende Menge nicht anwenden?

3. $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \forall n \in \mathbb{N}. \varphi_w(n) = \perp \text{ und } w \text{ ist ein Palindrom}\}$

Tutoraufgabe 3

1. Zeigen Sie, dass die folgende Instanz P des Post'schen Korrespondenzproblems keine Lösung hat:

$$P = \{(10, 101), (011, 11), (101, 011)\}$$

2. Zeigen Sie, dass das Post'sche Korrespondenzproblem über einem Alphabet mit nur einem Symbol entscheidbar ist.