
Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 19. Juli 2010 vor 12.00 Uhr in die THEO Briefkästen

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

1. Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und α ein regulärer Ausdruck über Σ . Dann kann man in Zeit $O(|w|)$ entscheiden, ob ein Wort $w \in \Sigma^*$ ein Teilwort v hat mit $v \in L(\alpha)$.
2. Es gibt eine Turingmaschine, die ihren Kopf nie weiter als 5 Felder von der Startposition wegbewegt, aber eine unendliche Sprache akzeptiert.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie im Folgenden Ihre Antworten möglichst knapp!

1. Für das spezielle Halteproblem $K = \{w \in \{0, 1\}^* \mid M_w[w] \downarrow\}$ und eine beliebige Sprache A gilt: Wenn $K \cap A$ entscheidbar ist, dann ist A endlich.
2. Für jede Turingmaschine M ist die Funktion

$$f_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } M \text{ auf allen Eingaben hält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

berechenbar.

3. Sei $A \subseteq \Sigma^*$. Wenn χ_A total ist, dann ist A entscheidbar.
4. Sei $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ein Post'sches Korrespondenzproblem über einem beliebigen Alphabet Σ mit $p_i = (x_i, y_i)$ und $|x_i| = |y_i|$ für alle $i \in [1, n]$.
Dann ist P entscheidbar!

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Geben Sie für jede der folgenden Mengen an, ob sie entscheidbar ist oder nicht. Beweisen Sie ihre Behauptungen.

1. $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w(0) = 0\}$.
2. $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w(w) = w\}$.
3. $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_0(0) = w\}$.

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Geben Sie jeweils ein Beispiel für die folgenden Objekte an. Falls kein solches Objekt existiert, begründen Sie dies.

1. Eine Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, die nicht berechenbar aber total ist.
2. Eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, die primitiv rekursiv ist, aber deren Definitionsbereich (also $\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq \perp\}$) endlich ist.
3. Eine Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, die total ist und für die $\{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w = f\}$ entscheidbar ist.
4. Eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$, die nicht rekursiv aufzählbar ist und deren Komplement ebenfalls nicht rekursiv aufzählbar ist.

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch Reduktion:

1. $H_0 \leq \{w_1 \# w_2 \# \dots \# w_n \mid n \geq 1, w_i \in \{0, 1\}^*, \exists i \in [1, n]. M_{w_i}[\epsilon] \downarrow\}$.
2. $\{w_1 \# w_2 \# \dots \# w_n \mid n \geq 1, w_i \in \{0, 1\}^*, \forall i \in [1, n]. M_{w_i}[\epsilon] \downarrow\} \leq H_0$.

Vorbereitung 1

1. Ist $ntime_M$ für jede deterministische Turingmaschine M berechenbar? Begründung!
2. Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Falls $NTIME(f(n))$ eine nichtentscheidbare Sprache enthält, dann ist f nicht berechenbar. Beweis!

Vorbereitung 2

Finden Sie für das Problem der 3-Färbbarkeit von Graphen (3COL), sowie für das STUNDENPLAN-Problem aus TA 3 jeweils eine lösbare und eine unlösbare Instanz.

Tutoraufgabe 1

1. Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berechenbar. Dann gilt für alle NTM M :
$$(\forall w \in \Sigma^*. ntime_M(w) \leq f(|w|)) \implies ntime_M \text{ berechenbar.}$$
2. Wir betrachten die Komplexitätsklasse P. Dann gibt es für jede DTM M mit $L(M) \in P$ ein Polynom p , so dass $time_M(w) \leq p(|w|)$ für alle $w \in \Sigma^*$ gilt.
Richtig oder Falsch? Begründung!
3. Ist jede in polynomieller Zeit berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ auch polynomiell beschränkt (\exists Polynom $p. \forall n. f(n) \leq p(n)$)? Begründung!
4. Sei p ein Polynom und M eine DTM mit $time_M(w) \leq p(|w|)$ für alle $w \in \Sigma^*$.
Konstruieren Sie einen einfachen polynomiell beschränkten Verifikator für $L(M)$.

Tutoraufgabe 2

Seien $A, B \in \Sigma^*$ Sprachen in NP. Zeigen Sie, dass $A \cup B$, $A \cap B$ und AB ebenfalls in NP liegen.

Überlegen Sie sich hierzu, wie geeignete Zertifikate aussehen.

Tutoraufgabe 3

Das STUNDENPLAN-Problem, das in der Praxis allen bekannt ist, lässt sich vereinfacht wie folgt formal beschreiben:

Gegeben: Endliche Mengen S (Studierende), V (Vorlesungen) und T (Termine) und eine Relation $R \subseteq S \times V$. Dabei bedeutet $(s, v) \in R$, dass s die Vorlesung v besuchen möchte.

Problem: Gibt es eine Abbildung $f : V \rightarrow T$, so dass alle Studierenden einen überschneidungsfreien Stundenplan haben, also

$$(s, v_1) \in R \wedge (s, v_2) \in R \wedge v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2).$$

1. Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN in NP liegt.
2. Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN NP-hart ist, indem sie eine polynomielle Reduktion von 3COL auf STUNDENPLAN angeben.
3. Geben Sie nun eine Reduktion von STUNDENPLAN auf SAT an, die es erlaubt, das Stundenplanproblem mit Hilfe eines SAT-Solvers zu lösen.