

---

## Einführung in die Theoretische Informatik

---

*Abgabetermin: 10. Mai 2010 vor 10.15 Uhr in die THEO Briefkästen*

### Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir betrachten das folgende einfache Modell eines Aufzugs in einem Gebäude mit 3 Stockwerken, nummeriert mit 0, 1, 2. Der Aufzug kann folgende Aktionen durchführen:

- (o) Tür öffnen (open)
- (c) Tür schließen (close)
- (u) Ein Stockwerk nach oben fahren (up)
- (d) Ein Stockwerk nach unten fahren (down)

Dabei gelten die Einschränkungen, dass der Aufzug niemals mit offener Tür fährt, und natürlich auch nicht in Stockwerke fährt, die nicht existieren.

1. Modellieren Sie den Aufzug als NFA  $N$  über  $\Sigma = \{o, c, u, d\}$ , so dass  $L(N)$  genau die Wörter enthält, die eine zulässige Aktionsfolge des Aufzugs darstellen.
2. Was ändert sich in diesem Fall, wenn man den NFA in einen DFA umwandelt?

### Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Das *Reißverschlussprodukt* von zwei Sprachen  $L_1$  und  $L_2$  ist wie folgt definiert:

$$L_1 \% L_2 = \{a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n \mid a_i \in \Sigma, b_i \in \Sigma, a_1 \dots a_n \in L_1, b_1 \dots b_n \in L_2\}$$

1. Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der  $L(aba^*) \% L(bc^*)$  beschreibt.
2. Vergleichen Sie das Reißverschlussprodukt mit dem Shuffle-Produkt aus TA2 von Blatt 2, und finden Sie zwei Sprachen  $A$  und  $B$  und ein Wort, das in  $(A \parallel B)$ , aber nicht in  $A \% B$  liegt.
3. Zeigen Sie durch eine geeignete Automatenkonstruktion: Wenn  $L_1$  und  $L_2$  regulär sind, dann ist auch  $L_1 \% L_2$  regulär.

Beschreiben Sie ihre Konstruktion zunächst informell.

### Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Ein  $\forall$ -NFA (“all-NFA”) ist wie ein NFA als 5-Tupel  $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  definiert. Allerdings ist die akzeptierte Sprache anders definiert:

$$L_{\forall}(N) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(\{q_0\}, w) \subseteq F\}$$

1. Sei  $\Sigma = \{a, b, c\}$ . Konstruieren Sie einen  $\forall$ -NFA  $N$ , so dass  $L_{\forall}(N)$  genau die Menge aller Wörter aus  $\Sigma^*$  ist, die weder ein  $c$  noch das Teilwort  $baba$  enthalten.
2. Zeigen Sie, dass man aus jedem  $\forall$ -NFA  $N$  einen NFA  $N'$  konstruieren kann, so dass  $L(N') = \Sigma^* \setminus L_{\forall}(N)$ .  
Vorgehensweise: Beschreiben Sie die Konstruktion zunächst informell, dann formal als Tupel, und beweisen Sie dann die Korrektheit Ihrer Konstruktion.
3. Modifizieren Sie die Potenzmengenkonstruktion geeignet, so dass man damit einen  $\forall$ -NFA in einen äquivalenten DFA umwandeln kann.

### Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Die Zustandsübergangsfunktion eines NFA  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_1\})$  sei gegeben durch

$q_i$	$\delta(q_i, 0)$	$\delta(q_i, 1)$
$q_0$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$
$q_1$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$
$q_2$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_2\}$
$q_3$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$

1. Konstruieren Sie mit dem Potenzmengenverfahren einen DFA  $B$ , der  $L(A)$  akzeptiert.
2. Geben Sie nun einen DFA  $C$  an, der  $\overline{L(A)} = \Sigma^* \setminus L(A)$  akzeptiert.

## Vorbereitung 1

Was lässt sich über die Menge der Pumping-Lemma-Zahlen einer endlichen Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  aussagen, wenn nur  $|\Sigma| = n$  bekannt ist?

## Vorbereitung 2

Seien  $A, B$  und  $X$  Sprachen mit  $\epsilon \notin A$ . Beweisen oder widerlegen Sie die Umkehrung von Arden's Lemma, d. h.  $X = A^*B \implies X = AX \cup B$ .

## Tutoraufgabe 1

Sei  $\Sigma$  ein Alphabet,  $a \in \Sigma$ , und  $L \subseteq \Sigma^*$  eine Sprache über  $\Sigma$ . Wir definieren die Sprachen  $\min(L)$  und  $\text{quot}(a, L)$  wie folgt:

$$\begin{aligned}\min(L) &= \{w \in L \mid \text{kein echtes Präfix von } w \text{ liegt in } L\} \\ \text{quot}(a, L) &= \{w \in \Sigma^* \mid aw \in L\}\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass  $\min(L)$  und  $\text{quot}(a, L)$  regulär sind, wenn  $L$  regulär ist.

## Tutoraufgabe 2

1. Sei  $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$ .  
Zeigen Sie, dass die Sprache  $L = \{ab^{2i}cd^ie \mid i \in \mathbb{N}\}$  nicht regulär ist.
2. Sei  $\Sigma = \{1\}$ . Zeigen Sie, dass die Sprache  $P = \{1^p \mid p \text{ prim}\}$  nicht regulär ist.

## Tutoraufgabe 3

Wir betrachten den DFA  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_1, q_2\})$ , dessen Zustandsübergangsfunktion  $\delta$  gegeben ist durch

$q_i$	$\delta(q_i, 0)$	$\delta(q_i, 1)$
$q_0$	$q_1$	$q_2$
$q_1$	$q_0$	$q_1$
$q_2$	$q_1$	$q_0$

Stellen Sie zur Berechnung der Sprachen  $L_i = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_i, w) \in \{q_1, q_2\}\}$  ein Gleichungssystem mit entsprechenden Unbekannten  $X_i$  für die Sprachen  $L_i$  auf und berechnen Sie mit Hilfe von Ardens Lemma alle  $X_i$  als reguläre Ausdrücke.