

---

## Einführung in die Theoretische Informatik

---

Abgabetermin: 17. Mai 2010 vor 12.00 Uhr in die THEO Briefkästen

### Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir betrachten wieder die Operation *quot* (vgl. Tutoraufgabe 1, Blatt 3):

$$\text{quot}(a, L) = \{w \in \Sigma^* \mid aw \in L\}$$

Diese wird auch als Ableitung der Sprache  $L$  nach  $a$  bezeichnet.

1. Finden Sie geeignete rechte Seiten für die folgenden Ableitungsregeln:

- $\text{quot}(a, \{\epsilon\}) = \dots$
- $\text{quot}(a, \{a'\}) = \dots$  für  $a' \in \Sigma$ ,
- $\text{quot}(a, L_1 \cup L_2) = \dots$

2. Zeigen Sie die Korrektheit der Regel für die Vereinigung

3. Stellen Sie auch die Regel für die Konkatenation auf, und unterscheiden Sie dabei die Fälle  $\epsilon \in L$  und  $\epsilon \notin L$ . Begründen Sie informell, warum die Regel korrekt ist.

### Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Stellen Sie die folgenden Sprachen jeweils durch einen regulären Ausdruck dar.

1. Die Sprache  $L_1$  aller Wörter über  $\Sigma = \{0, 1, /, \#\}$ , in denen das Teilwort  $\#/$  nicht vorkommt.
2. Die Sprache  $L_2$  aller Wörter über  $\{0, 1, /, \#\}$ , der Form  $\#/w\#/\$ , so dass  $w \in \Sigma^*$  kein Teilwort  $\#/$  enthält.

### Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Konstruieren Sie durch Lösung entsprechender Gleichungen (siehe TA 3, Blatt 3) einen regulären Ausdruck für die Sprache  $R_{q_4, q_0}^5$  (Def. siehe Kleene'scher Satz 2.17) des DFA  $M = (\{q_0, \dots, q_4\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_4\})$  mit folgender Übergangstabelle:

$q$	$\delta(q, 0)$	$\delta(q, 1)$
$q_0$	$q_1$	$q_2$
$q_1$	$q_0$	$q_4$
$q_2$	$q_2$	$q_2$
$q_3$	$q_1$	$q_0$
$q_4$	$q_3$	$q_3$

### Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sei  $\Sigma = \{a, b\}$ .

1. Sei  $L_1 = \{(a^2b^n)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .  
Zeigen Sie mithilfe des Pumping-Lemmas, dass  $L_1$  nicht regulär ist.
2. Sei  $L_2 = \{a^ib^j \mid i < j\}$ .  
Nutzen Sie die Abschlusseigenschaften der regulären Sprachen und die bekannte Tatsache, dass  $L = \{a^ib^i \mid i \in \mathbb{N}\}$  nicht regulär ist, um zu zeigen, dass  $L_2$  nicht regulär ist.
3. Geben Sie ein Beispiel dafür, dass die Schlussweise „ $L_1$  ist nicht regulär und  $L_2$  ist nicht regulär, also ist  $L_1 \cap L_2$  nicht regulär“ im Allgemeinen falsch ist.

## Vorbereitung 1

Die Minimierung deterministischer Automaten beruht auf 2 Minimierungsprinzipien, und zwar

- Entfernen der vom Startzustand aus unerreichbaren Zustände eines Automaten  $A$ .
- Konstruktion des Quotienten  $A/\equiv_A$  eines Automaten  $A$ .

Der Quotientenautomat  $A/\equiv_A$  wird dabei in den 2 aufeinanderfolgenden Schritten

- a) Berechnung der äquivalenten Zustandspaare (Relation  $\equiv_A$  über  $Q$ ), und
- b) „Kollabierung“ des Automaten durch Klassenbildung äquivalenter Zustände, gewonnen.

1. Zeigen Sie, dass bei jeder Anwendung eines der obigen Minimierungsprinzipien die akzeptierte Sprache unverändert bleibt.
2. Machen Sie sich klar, dass man stets isomorphe Automaten erhält, wenn man nacheinander mindestens beide Minimierungsprinzipien in beliebiger Reihenfolge anwendet. Die beiden Minimierungsprinzipien sind also in gewissem Sinne unabhängig voneinander.

## Vorbereitung 2

Konstruieren Sie einen DFA  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , der einen zu  $q_0$  äquivalenten und erreichbaren Zustand  $p \neq q_0$  besitzt.

## Vorbereitung 3

Skizzieren Sie, wie man für einen gegebenen NFA  $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  und ein  $n \in \mathbb{N}$  entscheiden kann, ob ein Wort  $w \in L(N)$  existiert mit  $|w| \geq n$ .

## Tutoraufgabe 1

Gegeben sei der deterministische endliche Automat

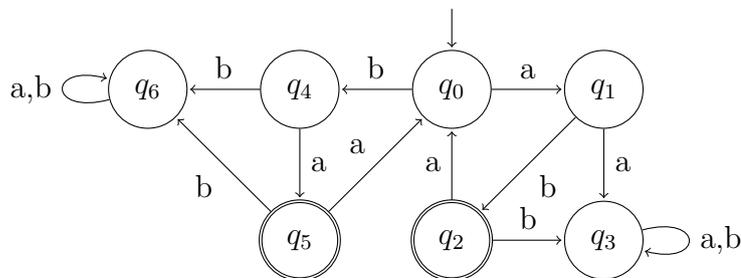
$A = (\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{a, b\}, \delta, 0, \{6\})$  mit folgender Übergangsfunktion  $\delta$ :

$q$	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$	$q$	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$
0	1	0	4	1	4
1	3	5	5	6	0
2	2	2	6	6	2
3	6	4			

Konstruieren Sie einen zu  $A$  äquivalenten DFA mit einer für  $L(A)$  minimalen Anzahl von Zuständen.

## Tutoraufgabe 2

- Sei  $\Sigma = \{a, b\}$ . Zeigen Sie, dass im untenstehenden DFA  $q_3 \not\equiv_M q_4$  und  $q_3 \equiv_M q_6$  gelten:



- Sei  $L = L(a^*b^*)$ . Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Äquivalenzbeziehungen:

$$aa \equiv_L \epsilon, \quad ab \equiv_L aa, \quad aba \equiv_L abba, \quad aba \equiv_L \epsilon.$$

- Sei nun  $\Sigma_n = \{a_1, \dots, a_n\}$  und

$$L_n = \{w \in \Sigma_n^* \mid \forall a \in \Sigma_n. \#_a(w) = 1\}.$$

Zeigen Sie, dass jeder DFA, der  $L_n$  akzeptiert, mindestens  $2^n + 1$  Zustände haben muss. Betrachten Sie dazu die Äquivalenzklassen von  $\equiv_{L_n}$ .

## Tutoraufgabe 3

Skizzieren Sie ein Entscheidungsverfahren, welches für einen gegebenen DFA  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  feststellt, ob  $|L(M)| \leq 100$ .