
Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 17. Mai 2010 vor 12.00 Uhr in die THEO Briefkästen

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir betrachten wieder die Operation $quot$ (vgl. Tutoraufgabe 1, Blatt 3):

$$quot(a, L) = \{w \in \Sigma^* \mid aw \in L\}$$

Diese wird auch als Ableitung der Sprache L nach a bezeichnet.

1. Finden Sie geeignete rechte Seiten für die folgenden Ableitungsregeln:

- $quot(a, \{\epsilon\}) = \dots$
- $quot(a, \{a'\}) = \dots$ für $a' \in \Sigma$,
- $quot(a, L_1 \cup L_2) = \dots$

2. Zeigen Sie die Korrektheit der Regel für die Vereinigung

3. Stellen Sie auch die Regel für die Konkatenation auf, und unterscheiden Sie dabei die Fälle $\epsilon \in L$ und $\epsilon \notin L$. Begründen Sie informell, warum die Regel korrekt ist.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Stellen Sie die folgenden Sprachen jeweils durch einen regulären Ausdruck dar.

1. Die Sprache L_1 aller Wörter über $\Sigma = \{0, 1, /, \#\}$, in denen das Teilwort $\#/$ nicht vorkommt.
2. Die Sprache L_2 aller Wörter über $\{0, 1, /, \#\}$, der Form $\#/w\#/\$, so dass $w \in \Sigma^*$ kein Teilwort $\#/$ enthält.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Konstruieren Sie durch Lösung entsprechender Gleichungen (siehe TA 3, Blatt 3) einen regulären Ausdruck für die Sprache R_{q_4, q_0}^5 (Def. siehe Kleene'scher Satz 2.17) des DFA $M = (\{q_0, \dots, q_4\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_4\})$ mit folgender Übergangstabelle:

q	$\delta(q, 0)$	$\delta(q, 1)$
q_0	q_1	q_2
q_1	q_0	q_4
q_2	q_2	q_2
q_3	q_1	q_0
q_4	q_3	q_3

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Sei $L_1 = \{(a^2b^n)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Zeigen Sie mithilfe des Pumping-Lemmas, dass L_1 nicht regulär ist.
2. Sei $L_2 = \{a^ib^j \mid i < j\}$.
Nutzen Sie die Abschlusseigenschaften der regulären Sprachen und die bekannte Tatsache, dass $L = \{a^ib^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist, um zu zeigen, dass L_2 nicht regulär ist.
3. Geben Sie ein Beispiel dafür, dass die Schlussweise „ L_1 ist nicht regulär und L_2 ist nicht regulär, also ist $L_1 \cap L_2$ nicht regulär“ im Allgemeinen falsch ist.

Vorbereitung 1

Die Minimierung deterministischer Automaten beruht auf 2 Minimierungsprinzipien, und zwar

- Entfernen der vom Startzustand aus unerreichbaren Zustände eines Automaten A .
- Konstruktion des Quotienten A/\equiv_A eines Automaten A .

Der Quotientenautomat A/\equiv_A wird dabei in den 2 aufeinanderfolgenden Schritten

- a) Berechnung der äquivalenten Zustandspaare (Relation \equiv_A über Q), und
- b) „Kollabierung“ des Automaten durch Klassenbildung äquivalenter Zustände, gewonnen.

1. Zeigen Sie, dass bei jeder Anwendung eines der obigen Minimierungsprinzipien die akzeptierte Sprache unverändert bleibt.
2. Machen Sie sich klar, dass man stets isomorphe Automaten erhält, wenn man nacheinander mindestens beide Minimierungsprinzipien in beliebiger Reihenfolge anwendet. Die beiden Minimierungsprinzipien sind also in gewissem Sinne unabhängig voneinander.

Vorbereitung 2

Konstruieren Sie einen DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, der einen zu q_0 äquivalenten und erreichbaren Zustand $p \neq q_0$ besitzt.

Vorbereitung 3

Skizzieren Sie, wie man für einen gegebenen NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ und ein $n \in \mathbb{N}$ entscheiden kann, ob ein Wort $w \in L(N)$ existiert mit $|w| \geq n$.

Tutoraufgabe 1

Gegeben sei der deterministische endliche Automat

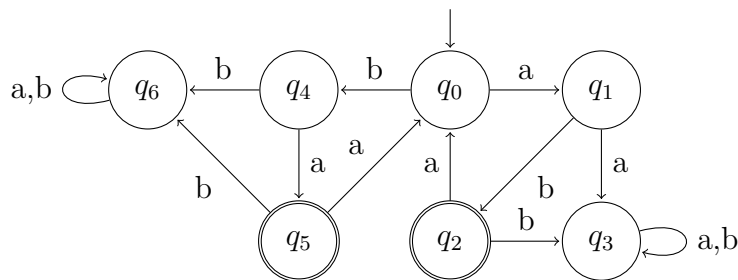
$A = (\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{a, b\}, \delta, 0, \{6\})$ mit folgender Übergangsfunktion δ :

q	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$	q	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$
0	1	0	4	1	4
1	3	5	5	6	0
2	2	2	6	6	2
3	6	4			

Konstruieren Sie einen zu A äquivalenten DFA mit einer für $L(A)$ minimalen Anzahl von Zuständen.

Tutoraufgabe 2

1. Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Zeigen Sie, dass im untenstehenden DFA $q_3 \not\equiv_M q_4$ und $q_3 \equiv_M q_6$ gelten:



2. Sei $L = L(a^*b^*)$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Äquivalenzbeziehungen:

$$aa \equiv_L \epsilon, \quad ab \equiv_L aa, \quad aba \equiv_L abba, \quad aba \equiv_L \epsilon.$$

3. Sei nun $\Sigma_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ und

$$L_n = \{w \in \Sigma_n^* \mid \forall a \in \Sigma_n. \#_a(w) = 1\}.$$

Zeigen Sie, dass jeder DFA, der L_n akzeptiert, mindestens $2^n + 1$ Zustände haben muss. Betrachten Sie dazu die Äquivalenzklassen von \equiv_{L_n} .

Tutoraufgabe 3

Skizzieren Sie ein Entscheidungsverfahren, welches für einen gegebenen DFA

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ feststellt, ob $|L(M)| \leq 100$.