

---

## Einführung in die Theoretische Informatik

---

Abgabetermin: 31. Mai 2010 vor 12.00 Uhr in die THEO Briefkästen

### Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. Konstruieren Sie ein Beispiel dafür, dass unerreichbare Zustände nicht automatisch äquivalent sind. Begründung!
2. Sei  $\Sigma$  ein Alphabet und  $L \subseteq \Sigma^*$ . Beweisen oder widerlegen Sie:
  - (a) Wenn  $w \equiv_L w'$  und  $v \in \Sigma^*$ , dann ist auch  $wv \equiv_L w'v$ .
  - (b) Wenn  $w \equiv_L w'$  und  $v \in \Sigma^*$ , dann ist auch  $vw \equiv_L vw'$ .

### Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

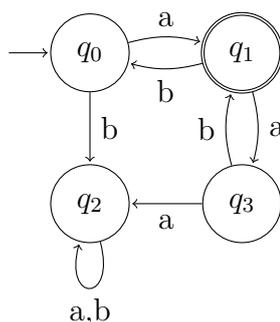
Beschreiben Sie ein Entscheidungsverfahren, welches für einen gegebenen DFA  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  entscheidet, ob jedes von  $M$  akzeptierte Wort eine ungerade Länge hat. Benutzen Sie dabei den Test auf Leerheit der Sprache eines Automaten.

### Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei  $\Sigma$  ein Alphabet. Für eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  definieren wir die folgenden Sprachen:

$$\text{suff}(L) = \{v \in \Sigma^* \mid \exists w \in \Sigma^*. vw \in L\}$$

1. Geben Sie einen regulären Ausdruck für  $\text{suff}(L((ab)^*b))$  an.
2. Gegeben sei folgender DFA  $M$ :



Geben Sie einen endlichen Automaten (DFA, NFA oder  $\epsilon$ -NFA) an, der  $\text{suff}(L(M))$  akzeptiert.

3. Zeigen Sie: Wenn  $L \subseteq \Sigma^*$  regulär ist, so ist auch  $\text{suff}(L)$  regulär.

*Hinweis, falls Sie eine Automatenkonstruktion verwenden:* Beschreiben Sie Ihre Konstruktionsidee zunächst informell und geben Sie danach den Automaten formal als 5-Tupel an.

## Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

1. Seien  $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, F_1)$  und  $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{02}, F_2)$  beliebige DFAs, und  $M = (Q_M, \Sigma, \delta_M, q_{0M}, F_M)$  ein minimaler DFA mit  $L(M) = L(A_1) \cup L(A_2)$ .  
Zeigen Sie:

$$|Q_M| \leq |Q_1| \cdot |Q_2|.$$

2. Berechnen Sie systematisch den Quotientenautomaten  $M/\equiv_M$  des DFA  $M = (\{A, B, C, D, E, F\}, \{0, 1\}, \delta, A, \{A, D\})$  mit folgender Übergangsfunktion:

$q$	$\delta(q, 0)$	$\delta(q, 1)$
$A$	$A$	$F$
$B$	$C$	$A$
$C$	$D$	$B$
$D$	$D$	$C$
$E$	$F$	$D$
$F$	$A$	$E$

Protokollieren Sie die Schritte des angewandten Verfahrens.

## Vorbereitung 1

Sei  $\rightarrow \subseteq A \times A$  eine beliebige binäre Relation. Dann sind die Relationen  $\rightarrow^n$ ,  $\rightarrow^*$  und  $\rightarrow^+$  wie in Def. 3.5 definiert.

1. Beweisen oder widerlegen Sie:

$$(a) \quad x \rightarrow y \iff x \rightarrow^1 y$$

$$(b) \quad x \rightarrow y \implies x \rightarrow^2 y$$

$$(c) \quad x \rightarrow y \implies x \rightarrow^* y$$

2. Zeigen Sie formal mit Induktion:  $x \rightarrow^n y \wedge y \rightarrow^m z \implies x \rightarrow^{n+m} z$

## Vorbereitung 2

Gegeben sei die Grammatik  $G = (\{S, T\}, \{a, b\}, P, S)$  mit den Produktionen

$$S \rightarrow Tb, \quad T \rightarrow aS \mid Sb \mid \epsilon.$$

1. Beschreiben Sie  $L(G)$  Mengentheoretisch möglichst einfach.

2. Beweisen oder widerlegen Sie: (i)  $a^2b^4 \in L(G)$ . (ii)  $a^4b^4 \in L(G)$ .

## Tutoraufgabe 1

Sei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  eine kontextfreie Grammatik.

Zeigen Sie, dass für alle  $\alpha, \beta, u, v, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in (\Sigma \cup V)^*$  gilt:

$$1. \quad \alpha \rightarrow_G \beta \implies u\alpha v \rightarrow_G u\beta v \quad (\text{Abschluss von } \rightarrow_G \text{ unter Kontext})$$

$$2. \quad \alpha \rightarrow_G^n \beta \implies u\alpha v \rightarrow_G^n u\beta v \quad (\text{Abschluss von } \rightarrow_G^n \text{ unter Kontext})$$

$$3. \quad \alpha_1 \rightarrow_G^n \beta_1 \wedge \alpha_2 \rightarrow_G^m \beta_2 \implies \alpha_1\alpha_2 \rightarrow_G^{n+m} \beta_1\beta_2 \\ (\text{Dekompositionslemma (Lemma 3.9), 1. Teil: } \iff)$$

## Tutoraufgabe 2

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 2 \cdot \#_b(w)\}$$

erzeugt und zeigen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.