
Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 31. Mai 2010 vor 12.00 Uhr in die THEO Briefkästen

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. Konstruieren Sie ein Beispiel dafür, dass unerreichbare Zustände nicht automatisch äquivalent sind. Begründung!
2. Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Beweisen oder widerlegen Sie:
 - (a) Wenn $w \equiv_L w'$ und $v \in \Sigma^*$, dann ist auch $wv \equiv_L w'v$.
 - (b) Wenn $w \equiv_L w'$ und $v \in \Sigma^*$, dann ist auch $vw \equiv_L vw'$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

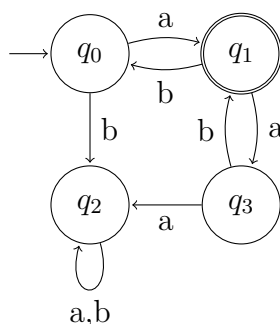
Beschreiben Sie ein Entscheidungsverfahren, welches für einen gegebenen DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ entscheidet, ob jedes von M akzeptierte Wort eine ungerade Länge hat. Benutzen Sie dabei den Test auf Leerheit der Sprache eines Automaten.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ definieren wir die folgenden Sprachen:

$$\text{suff}(L) = \{v \in \Sigma^* \mid \exists w \in \Sigma^*. vw \in L\}$$

1. Geben Sie einen regulären Ausdruck für $\text{suff}(L((ab)^*b))$ an.
2. Gegeben sei folgender DFA M :



Geben Sie einen endlichen Automaten (DFA, NFA oder ϵ -NFA) an, der $\text{suff}(L(M))$ akzeptiert.

3. Zeigen Sie: Wenn $L \subseteq \Sigma^*$ regulär ist, so ist auch $\text{suff}(L)$ regulär.

Hinweis, falls Sie eine Automatenkonstruktion verwenden: Beschreiben Sie Ihre Konstruktionsidee zunächst informell und geben Sie danach den Automaten formal als 5-Tupel an.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

1. Seien $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, F_1)$ und $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{02}, F_2)$ beliebige DFAs, und $M = (Q_M, \Sigma, \delta_M, q_{0M}, F_M)$ ein minimaler DFA mit $L(M) = L(A_1) \cup L(A_2)$.
Zeigen Sie:

$$|Q_M| \leq |Q_1| \cdot |Q_2|.$$

2. Berechnen Sie systematisch den Quotientenautomaten M/\equiv_M des DFA $M = (\{A, B, C, D, E, F\}, \{0, 1\}, \delta, A, \{A, D\})$ mit folgender Übergangsfunktion:

q	$\delta(q, 0)$	$\delta(q, 1)$
A	A	F
B	C	A
C	D	B
D	D	C
E	F	D
F	A	E

Protokollieren Sie die Schritte des angewandten Verfahrens.

Vorbereitung 1

Sei $\rightarrow \subseteq A \times A$ eine beliebige binäre Relation. Dann sind die Relationen \rightarrow^n , \rightarrow^* und \rightarrow^+ wie in Def. 3.5 definiert.

1. Beweisen oder widerlegen Sie:

$$(a) \quad x \rightarrow y \iff x \rightarrow^1 y$$

$$(b) \quad x \rightarrow y \implies x \rightarrow^2 y$$

$$(c) \quad x \rightarrow y \implies x \rightarrow^* y$$

2. Zeigen Sie formal mit Induktion: $x \rightarrow^n y \wedge y \rightarrow^m z \implies x \rightarrow^{n+m} z$

Vorbereitung 2

Gegeben sei die Grammatik $G = (\{S, T\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Produktionen

$$S \rightarrow Tb, \quad T \rightarrow aS \mid Sb \mid \epsilon.$$

1. Beschreiben Sie $L(G)$ Mengentheoretisch möglichst einfach.

2. Beweisen oder widerlegen Sie: (i) $a^2b^4 \in L(G)$. (ii) $a^4b^4 \in L(G)$.

Tutoraufgabe 1

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik.

Zeigen Sie, dass für alle $\alpha, \beta, u, v, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in (\Sigma \cup V)^*$ gilt:

$$1. \quad \alpha \rightarrow_G \beta \implies u\alpha v \rightarrow_G u\beta v \quad (\text{Abschluss von } \rightarrow_G \text{ unter Kontext})$$

$$2. \quad \alpha \rightarrow_G^n \beta \implies u\alpha v \rightarrow_G^n u\beta v \quad (\text{Abschluss von } \rightarrow_G^n \text{ unter Kontext})$$

$$3. \quad \alpha_1 \rightarrow_G^n \beta_1 \wedge \alpha_2 \rightarrow_G^m \beta_2 \implies \alpha_1\alpha_2 \rightarrow_G^{n+m} \beta_1\beta_2 \\ (\text{Dekompositionslemma (Lemma 3.9), 1. Teil: } \iff)$$

Tutoraufgabe 2

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 2 \cdot \#_b(w)\}$$

erzeugt und zeigen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.