
Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 7. Juni 2010 vor 12.00 Uhr in die THEO Briefkästen

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir betrachten die Grammatik $G(\{S, T\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Produktionen

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSb \mid SS \mid \epsilon, \\ T &\rightarrow TaTb \mid \epsilon. \end{aligned}$$

Zeigen Sie jeweils per Induktion:

1. $L(T) \subseteq L(S)$.
2. Wenn $w \in L(T)$, dann ist auch $awb \in L(T)$.
3. Wenn $v \in L(T)$ und $w \in L(T)$, dann ist auch $vw \in L(T)$.
4. $L(S) \subseteq L(T)$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den folgenden Produktionen:

$$S \rightarrow aSbSb \mid SS \mid \epsilon.$$

1. Zeigen Sie induktiv, dass für alle ableitbaren Wörter $w \in L(G)$ die Anzahl der enthaltenen b doppelt so groß ist wie die Anzahl der enthaltenen a , d. h., dass gilt $\#_b(w) = 2 \cdot \#_a(w)$.
2. Zeigen Sie, dass alle Satzformen $\alpha_n = (ab)^n S b^n$ für $n \geq 0$ in G ableitbar sind.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $\Sigma = \{0, 1, (,), \cup, *, \emptyset, \epsilon\}$ die Zeichenmenge, aus der reguläre Ausdrücke über dem Alphabet $\{0, 1\}$ gebildet werden. (Wir schreiben hier \cup anstelle von $|$, um Zeichenverwirrung beim Aufschreiben der Grammatik zu vermeiden.)

1. Geben Sie eine *eindeutige* kontextfreie Grammatik an, die die Menge der regulären Ausdrücke beschreibt. Die Grammatik soll so konstruiert sein, dass ungeklammerte Ausdrücke stets als rechts geklammert geparsert werden (z.B. 010 als $0(10)$) und die Prioritäten der Operatoren berücksichtigt sind.
2. Geben Sie einen Syntaxbaum für das Wort $01^*0|1$ an.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir betrachten *erweiterte* kontextfreie Grammatiken, bei denen auf der rechten Seite jeder Produktion ein regulärer Ausdruck α über $\Sigma \cup V$ anstelle einer einzelnen Satzform w über $\Sigma \cup V$ stehen darf. Beim Anwenden der Produktion darf dann eine beliebige Satzform aus $L(\alpha)$ eingesetzt werden.

Diese Art von Grammatik ist in der Praxis oft praktischer, da sich mit Hilfe der Sternoperation Wiederholung leichter ausdrücken lässt. Ein Beispiel ist die Grammatik

$$G = (\{0, 1, ;, [,], \{S\}, P, S)$$

mit den Produktionen

$$S \rightarrow 1(0 \mid 1)^* \mid [S(;S)^*]$$

1. Zeigen Sie, dass erweiterte kontextfreie Grammatiken nicht ausdrucksstärker sind als gewöhnliche kontextfreie Grammatiken, indem Sie ein Verfahren angeben, wie eine erweiterte Grammatik in eine gewöhnliche Grammatik transformiert werden kann.
2. Wenden Sie Ihr Verfahren auf die oben angegebene Grammatik G an.

Vorbereitung 1

Wandeln Sie die folgende Grammatik in Chomsky-Normalform um:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 0A0 \mid 1B1 \mid BB, \\ A &\rightarrow D, \quad B \rightarrow S \mid A, \\ C &\rightarrow S \mid \epsilon, \quad D \rightarrow C. \end{aligned}$$

Vorbereitung 2

Welche Symbole in der folgenden Grammatik sind erzeugend, welche erreichbar, und welche nützlich?

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A \mid a, \\ A &\rightarrow BC, \quad B \rightarrow AE \mid C, \\ C &\rightarrow aS, \quad D \rightarrow aB \mid FS \\ E &\rightarrow EA, \quad F \rightarrow Ca \mid a. \end{aligned}$$

Tutoraufgabe 1

Wir betrachten die kontextfreie Grammatik $G = (V, \{a, b\}, P, S)$ mit Produktionen in Chomsky-Normalform

$$\begin{aligned} S &\rightarrow YC_3 \mid YX \mid AC_3 \mid AX \mid YY \mid YB \mid YA \mid AY \mid AB \mid AA, \\ X &\rightarrow ZC_2 \mid ZB \mid BZ \mid BB, \\ Y &\rightarrow AC_1 \mid AY \mid AA, \\ C_1 &\rightarrow YZ \mid AZ, \\ C_2 &\rightarrow BZ, \\ Z &\rightarrow YC_3 \mid YX \mid AC_3 \mid AX \mid YY \mid YB \mid YA \mid AY \mid AB \mid AA, \\ C_3 &\rightarrow XZ \mid YZ \mid BZ \mid AZ, \\ A &\rightarrow a, \\ B &\rightarrow b. \end{aligned}$$

Entscheiden Sie mit Hilfe des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus, ob die Wörter $aabaa$ und $abab$ in der Sprache $L(G)$ enthalten sind! Geben Sie gegebenenfalls Ableitungen an!

Tutoraufgabe 2

Skizzieren Sie ein Verfahren, welches für eine gegebene kontextfreie Grammatik G entscheidet, ob $L(G)$ endlich ist.

Tutoraufgabe 3

Gegeben sei die Sprache $L = \{a^n b^{4n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, die L erzeugt.
2. Konstruieren Sie mit Standardverfahren aus der Vorlesung zu G einen Kellerautomaten K , der L durch Endzustände akzeptiert.