

---

## Einführung in die Theoretische Informatik

---

Abgabetermin: 14. Juni 2010 vor 12.00 Uhr in die THEO Briefkästen

### Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Streicht man aus einem Wort  $w \in \Sigma^*$  an beliebig vielen Stellen einen Buchstaben, so erhält man ein *verstreutes Teilwort*  $w'$  von  $w$ . Formal:  $w' = u_1 u_2 \dots u_n$  mit  $u_i \in \Sigma^*$  ist ein verstreutes Teilwort von  $w = v_0 u_1 v_1 u_2 v_2 \dots v_{n-1} u_n v_n$  mit  $v_i \in \Sigma^*$ .

Zu jeder Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  definieren wir  $sub(L)$  wie folgt:

$$sub(L) = \{w' \mid w' \text{ ist ein verstreutes Teilwort eines Worts } w \in L\}.$$

Man zeige:

1. Wenn  $L$  regulär ist, dann ist  $sub(L)$  ebenfalls regulär.
2. Wenn  $L$  kontextfrei ist, dann ist  $sub(L)$  ebenfalls kontextfrei.
3. Wenn  $L$  kontextfrei ist, dann ist  $sub(L)$  sogar regulär.

*Hinweis:* Die ersten beiden Aufgabenteile sollten Ihnen keine großen Schwierigkeiten bereiten. Der dritte Teil ist eine härtere Nuss und erfordert einiges an Überlegungen (aber kein zusätzliches Wissen). Sollten Sie diesen Teil nicht lösen können, ist das kein Grund zur Sorge.

### Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Gegeben sei der Kellerautomat  $K = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta)$  mit  $\Sigma = \{a, b, \#\}$ ,  $\Gamma = \{Z_0, X, Y, Z\}$  und der Übergangsfunktion

$$\begin{aligned} \delta(q, \epsilon, Z_0) &= \{(q, XZ)\}, & \delta(q, a, X) &= \{(q, XY)\}, \\ \delta(q, \#, X) &= \{(q, \epsilon)\}, & \delta(q, b, Y) &= \{(q, \epsilon)\}, \\ \delta(q, a, Z) &= \{(q, \epsilon)\}. \end{aligned}$$

1. Geben Sie eine Berechnung als Konfigurationsfolge an, die zeigt, dass  $K$  das Wort  $a\#ba$  mit leerem Keller akzeptiert, d. h., dass  $a\#ba \in L_\epsilon(K)$  gilt.
2. Modifizieren Sie die Übergangsfunktion  $\delta$  so zu einer Funktion  $\delta'$ , dass für den Kellerautomat  $K' = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta')$  gilt:  $L_\epsilon(K') = (L_\epsilon(K))^*$ .

### Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Seien  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ .

1. Zeigen Sie: Wenn  $L_1$  kontextfrei und  $L_2$  regulär ist, dann ist  $L_1 \setminus L_2$  kontextfrei.

*Hinweis:* Konstruieren sie aus einem PDA und einem DFA/NFA einen neuen PDA.

2. Gilt auch die folgende Aussage? Wenn  $L_1$  regulär und  $L_2$  kontextfrei ist, dann ist  $L_1 \setminus L_2$  kontextfrei.

### Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir betrachten die Grammatik  $G = (\{S, T\}, \{a, b, c\}, P, S)$  mit den folgenden Produktionen:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow T \mid SS, \\ T &\rightarrow aSbSb \mid c. \end{aligned}$$

Konstruieren Sie eine zu  $G$  äquivalente Grammatik  $G'$  in Chomsky-Normalform, und bestimmen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob  $cabcb \in L(G')$ .

## Vorbereitung 1

Geben Sie einen DPDA an, der die Sprache  $L = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$  mit Endzustand akzeptiert. Erfüllt  $L$  die Präfixbedingung?

## Vorbereitung 2

Welche Eigenschaft muss eine kontextfreie Grammatik haben, damit der daraus konstruierte Kellerautomat (vgl. Satz 3.56) deterministisch ist?

## Tutoraufgabe 1

Wir betrachten den Kellerautomaten  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \#, \delta)$ . Dabei ist  $Q = \{q_0, q_1\}$ ,  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $\Gamma = \{\#, A\}$ . Die Übergangsfunktion  $\delta$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\delta(q_0, a, \#) &= \{(q_0, \#A), (q_1, A)\}, \\ \delta(q_1, b, A) &= \{(q_1, \epsilon)\},\end{aligned}$$

und  $\delta(q, x, Z) = \emptyset$  für alle anderen Kombinationen aus  $q \in Q$ ,  $x \in \Sigma$ ,  $Z \in \Gamma$ .

1. Konstruieren Sie mit Standardverfahren aus der Vorlesung eine kontextfreie Grammatik  $G$ , die  $L_\epsilon(M)$  erzeugt.
2. Vereinfachen Sie die erhaltene Grammatik durch Entfernung überflüssiger Variablen und geben Sie eine knappe informelle Beschreibung der erzeugten Sprache an.
3. Wieviele Produktionen ergeben sich im allgemein aus einem Übergang  $(q', \gamma) \in \delta(q, b, Z)$  im Kellerautomaten?

## Tutoraufgabe 2

Konstruieren Sie eine Turingmaschine  $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \square, F)$ , mit  $\Sigma = \{\}$ , die eine eingegebene Strichzahl verdoppelt.