

---

## Einführung in die Theoretische Informatik

---

Abgabetermin: 28. Juni 2010 vor 12.00 Uhr in die THEO Briefkästen

### Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Seien  $\Sigma = \{a, b\}$  und  $L = \{w \in \Sigma^* \mid w = uav, u, v \in \Sigma^*, |u|_a = |v|_a, |u|_b = |v|_b\}$ .  
Geben Sie einen 2-Kellerautomaten an (Definition siehe Turaufgabe 1), der  $L$  akzeptiert.

### Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Seien  $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  ein beliebiges  $n$ -elementiges Alphabet und  $\Sigma' = \Sigma \cup \{\#\}$ .  
Geben Sie eine Turingmaschine  $M = (Q, \Sigma', \Gamma, \delta, q_0, \square, F)$  mit höchstens 5 Zuständen an, die bei leerer Eingabe das Alphabet  $\Sigma$  in der Form  $\#a_1\#a_2 \dots \#a_n$  auf das Band schreibt und mit dem Kopf auf dem ersten, rechtsstehenden Zeichen der Ausgabe anhält.

### Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Eine 1-Band Turingmaschine  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \square, F)$  heißt linear beschränkter Automat, wenn sie für keine Eingabe ein Leerzeichen  $\square$  überschreibt.  
Sei  $\Sigma = \{0, 1\}$ . Geben Sie für die kontextsensitive Sprache  $L = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$  einen linear beschränkten Automaten  $M$  an, der  $L$  akzeptiert.

### Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass man **case**-Anweisungen der folgenden Form für festes  $n$  durch LOOP-Programme simulieren kann:

**case**  $x_i$  **do** 0: $P_0$ ; 1: $P_1$ ; ...  $n$ : $P_n$  **od**

Falls  $0 \leq x_i \leq n$  gilt, dann wird das LOOP-Programm  $P_{x_i}$  ausgeführt und die **case**-Anweisung beendet. Ist  $x_i > n$ , so wird die **case**-Anweisung übersprungen. Keines der LOOP-Programme  $P_j$  enthalte die Variable  $x_i$ .  
Verwenden Sie nur Zuweisungen der Form  $x_k := x_j \pm c$ , den LOOP-Befehl und Initialisierungen der Form  $x_k := c$ .

## Vorbereitung 1

Sei  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  diejenige Funktion, die definiert ist durch die Startwerte  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 1$  zusammen mit der Rekursion

$$f(n+1) = n \cdot f(n-1) + f(n-2) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Geben Sie ein LOOP-Programm an, das den Funktionswert von  $f$  für  $n \geq 3$  in der Variablen  $x_3$  berechnet.

## Vorbereitung 2

Geben Sie eine auf den in der Vorlesung definierten Regeln für primitiv rekursive Funktionen basierende Definition an für  $fac(n) = n!$ .

## Tutoraufgabe 1

Ein 2-Kellerautomat  $K = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, Z'_0, F)$  ist ein Kellerautomat, der über einen zweiten Keller verfügt. Der zweite Keller wird mit  $Z'_0$  initialisiert. Die Übergangsfunktion  $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}_e(Q \times \Gamma^* \times \Gamma^*)$  beschreibt die Vorgehensweise des 2-KA wie folgt ( $\mathcal{P}_e$  bezeichnet die Menge aller endlichen Teilmengen): Liest der 2-KA im Zustand  $q$  die Eingabe  $b$  (auch  $b = \epsilon$  ist möglich), sind  $Z_1, Z_2$  die obersten Zeichen der beiden Keller und gilt  $(q', \alpha_1, \alpha_2) \in \delta(q, b, Z_1, Z_2)$ , dann kann der 2-KA in den Zustand  $q'$  übergehen und hierbei  $Z_1$  durch  $\alpha_1$  und  $Z_2$  durch  $\alpha_2$  ersetzen.

Zeigen Sie: Jede 1-Band-Turingmaschine  $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \square, F)$  kann durch einen 2-Kellerautomaten  $K = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q'_0, Z_0, Z'_0, F')$  simuliert werden.

## Tutoraufgabe 2

Zeigen Sie durch Rückführung auf die Definition, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind.

1.  $twopow(n) = 2^n$ ,
2.  $tower(n) = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^2}}}}$  (d.h.  $2^{(2^{(2^{\cdot^{\cdot^2}})})}$ , Turm der Höhe  $n$ ),
3.  $ifthen(n, a, b)$  mit

$$ifthen(n, a, b) = \begin{cases} a & n \neq 0, \\ b & n = 0. \end{cases}$$

## Tutoraufgabe 3

Sei  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  diejenige Funktion, die für alle  $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$  durch die Rekursion

$$f(n+1) = f(n) \cdot f(n-1)$$

mit den Startwerten  $f(0) = 1$  und  $f(1) = 2$  definiert ist.

1. Zeigen Sie, dass  $f$  primitiv-rekursiv ist.
2. Zeigen Sie, dass  $f$  streng monoton wachsend ist, d. h., es gilt  $f(n) < f(n+1)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \neq 1$ .
3. Ist der Wertebereich von  $f$  entscheidbar?