

# Ein erster Eindruck von Kategorientheorie

Birgit Schieder

16. Januar 2001

## Zusammenfassung

Dieser Text richtet sich an Leser ohne Vorkenntnisse in Kategorientheorie. Er vermittelt eine erste Vorstellung vom Inhalt der Kategorientheorie und von ihrer Modellvielfalt. Zu diesem Zweck werden zwei Grundbegriffe—„Kategorie“ und „Funktork“—der Kategorientheorie definiert sowie eine Reihe von Anwendungsbeispielen für diese Begriffe behandelt.

## 0 Einleitung

Dieser Text ist *keine* Einführung in die Kategorientheorie. Dazu müßte er die Länge eines Buchs haben. Vielmehr wird mit diesem Text versucht, auf wenigen Seiten einen ersten Eindruck von Kategorientheorie zu vermitteln. Dem Leser ohne Vorkenntnisse in Kategorientheorie, für den dieser Text geschrieben ist, soll zweierlei nahegebracht werden: Zum einen soll er eine erste Vorstellung bekommen, mit welchen Begriffen sich die Kategorientheorie beschäftigt. Dazu wählen wir die Begriffe „Kategorie“ (Abschnitt 1) und „Funktork“ (Abschnitt 2). Zum anderen soll der Leser einen ersten Eindruck von der Vielfalt der Modelle der Kategorientheorie erhalten. Dazu betrachten wir eine Reihe von Anwendungsbeispielen zu den beiden Begriffen „Kategorie“ und „Funktork“. Als Anwendungsbeispiele wählen wir solche, die in der Informatik eine wichtige Rolle spielen. Die Begriffe, die sich in der Kategorientheorie als am wertvollsten erwiesen haben, sowie größere Anwendungsbeispiele aus der Informatik gehen weit über den Inhalt dieses Texts hinaus.

Im Rest von Abschnitt 0 legen wir einige Notationen fest. Der Punkt „.“ in Infixnotation steht für die Funktionsanwendung. „Funktion“ bedeutet in

diesem Text „totale Funktion“. Für Mengen  $X$  und  $Y$  bezeichnet  $X \rightarrow Y$  die Menge aller Funktionen von  $X$  nach  $Y$ . Für die Funktionskomposition verwenden wir das Symbol  $\circ$ . Für eine Menge  $X$  bezeichnet  $id.X$  die Identitätsfunktion auf  $X$ . Mengenkompensation schreiben wir wie folgt: Für eine Variable  $v$ , ein Prädikat  $p$  und einen Ausdruck  $e$  bezeichnet

$$\{v : p.v : e.v\}$$

die Menge aller Werte  $e.v$ , wobei  $v$  alle Werte durchläuft, für die  $p.v$  gilt. Ist die Grundmenge  $X$ , aus der  $v$  stammt, nicht aus dem Zusammenhang klar, schreiben wir hinter der öffnenden Klammer „ $v \in X$ “ statt nur „ $v$ “. Anstelle von  $v$  darf auch eine Liste von Variablen stehen. Ist  $p$  das Prädikat *true*, so darf es in der Notation für die Mengenkompensation weggelassen werden.

Nun legen wir für die Symbole Bindungsstärken fest. Symbole derselben Zeile haben die gleiche Bindungsstärke; von Zeile zu Zeile nimmt die Bindungsstärke ab:

$$\begin{array}{l} \cdot \\ \downarrow \uparrow \\ ; \quad + \quad \wedge \\ \rightarrow \\ = \quad \in \\ \neg \\ \wedge \quad \vee \\ \Rightarrow \quad \Leftarrow \\ \equiv \end{array}$$

Wir führen noch einige Notationen in Zusammenhang mit Tripeln ein. Die Funktion  $\downarrow$  (gesprochen „Anfang“) liefert die erste Komponente eines Tripels, die Funktion  $\uparrow$  (gesprochen „Ende“) die dritte Komponente: Für alle Tripel  $(x, y, z)$  definieren wir

$$\downarrow(x, y, z) = x \quad \wedge \quad \uparrow(x, y, z) = z \quad . \quad (0)$$

Wir sagen, daß ein Tripel  $f$  mit einem Tripel  $g$  *komponierbar* ist, wenn das Ende von  $f$  gleich dem Anfang von  $g$  ist. Formal führen wir für Komponierbarkeit ein Prädikat  $K$  ein. Für alle Tripel  $f$  und  $g$  definieren wir

$$K.(f, g) \equiv \uparrow f = \downarrow g \quad .$$

Damit sind alle Notationen festgelegt, die wir in diesem Text brauchen.

# 1 Kategorien

Als erstes definieren wir den Begriff „Graph“, den wir anschließend zur Definition von „Kategorie“ verwenden werden.

**Definition** Seien  $O, M$  und  $P$  Mengen mit  $P \subseteq O \times M \times O$ . Dann heißt  $(O, M, P)$  ein *Graph*. □

**Bemerkung** Unser Begriff „Graph“ stimmt überein mit dem üblichen Begriff „gerichteter, kantenmarkierter Graph“. □

**Definition** Sei  $(O, M, P)$  ein Graph. Seien „;“ (gesprochen „komponiert“) und „1“ Funktionen mit folgenden Funktionalitäten:

$$\begin{aligned} ; &\in \{f, g \in P : K.(f, g) : (f, g)\} \rightarrow P \quad \text{und} \\ 1 &\in O \rightarrow P \quad . \end{aligned}$$

Das Tupel  $(O, M, P, ;, 1)$  heißt eine *Kategorie*, wenn die folgenden vier Gesetze gelten.

↓ und ↑ von Komponierten: Für alle  $f, g \in P : K.(f, g)$  gilt

$$\downarrow(f ; g) = \downarrow f \wedge \uparrow(f ; g) = \uparrow g \quad . \quad (1)$$

Assoziativität von „;“: Für alle  $f, g, h \in P : K.(f, g) \wedge K.(g, h)$  gilt

$$f ; (g ; h) = (f ; g) ; h \quad . \quad (2)$$

↓ und ↑ von Identitäten: Für alle  $a \in O$  gilt

$$\downarrow 1.a = a \wedge \uparrow 1.a = a \quad . \quad (3)$$

Identität der Komposition: Für alle  $f \in P$  gilt

$$1.(\downarrow f) ; f = f \wedge f ; 1.(\uparrow f) = f \quad . \quad (4)$$

□

Ist  $(O, M, P, ;, 1)$  eine Kategorie, so nennen wir die Elemente von  $O$  *Objekte*, die Elemente von  $M$  *Marken*, die Elemente von  $P$  *Pfeile*, die Funktion „;“ „Komposition“ und die Funktion „1“ „Identität“. Wir überladen die Symbole „;“ und „1“ und schreiben sie für die Komposition bzw. Identität jeder Kategorie, die in diesem Text vorkommt.

Im Rest von Abschnitt 1 betrachten wir einige Beispiele für Kategorien. Wir wählen Strukturen, die in der Informatik eine wichtige Rolle spielen.

**Beispiel** Gegeben sei eine Menge  $O$  von Mengen. Wir definieren eine Kategorie, deren Objekte die Elemente aus  $O$ —also Mengen—sind. Sei  $M$  die Menge aller Funktionen zwischen Mengen aus  $O$ . Als Pfeile wählen wir diese Funktionen zusammen mit ihren Definitions- und Wertemengen. Formal wird die Menge  $P$  der Pfeile definiert durch

$$P = \{X, Y \in O, \alpha \in M : \alpha \in X \rightarrow Y : (X, \alpha, Y)\} \quad .$$

Die Komposition „;“ definieren wir wie folgt: Für alle Pfeile  $(X, \alpha, Y) \in P$  und  $(Y, \beta, Z) \in P$  definieren wir

$$(X, \alpha, Y); (Y, \beta, Z) = (X, \beta \circ \alpha, Z) \quad ,$$

wobei  $\circ$  für die Funktionskomposition steht. Das Gesetz (1) folgt sofort. Das Gesetz (2) gilt, weil die Funktionskomposition  $\circ$  assoziativ ist. Die Identität 1 definieren wir wie folgt: Für alle Objekte  $X \in O$  definieren wir

$$1.X = (X, id.X, X) \quad .$$

Das Gesetz (3) folgt sofort. Das Gesetz (4) gilt, weil die Identitätsfunktion Identität der Funktionskomposition ist. Es folgt, daß  $(O, M, P, ;, 1)$  eine Kategorie ist. Wir bezeichnen sie mit *Set.O*.

□

**Beispiel** Für eine Menge  $X$  und eine zweistellige Relation  $\leq$  auf  $X$  heißt  $(X, \leq)$  eine *Präordnung*, wenn  $\leq$  reflexiv und transitiv ist.

Gegeben sei in diesem Beispiel eine Präordnung  $(X, \leq)$ . Wir definieren eine Kategorie, deren Objekte die Elemente aus  $X$  sind. Sei  $*$  die einzige Marke. Für alle  $a, b \in X$  gebe es genau dann einen Pfeil  $(a, *, b)$ , wenn  $a \leq b$  gilt. Formal definieren wir die Menge  $P$  der Pfeile durch

$$P = \{a, b \in X : a \leq b : (a, *, b)\} \quad .$$

Es gibt nur eine Möglichkeit, die Komposition „;“ so zu definieren, daß das Gesetz (1) gilt: Für alle Pfeile  $(a, *, b) \in P$  und  $(b, *, c) \in P$  definieren wir

$$(a, *, b); (b, *, c) = (a, *, c) \quad .$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist ein Pfeil, d.h. es gilt  $(a, *, c) \in P$ , da  $\leq$  transitiv ist. Es gibt auch nur eine Möglichkeit, die Identität 1 so zu definieren, daß das Gesetz (3) gilt: Für alle  $a \in X$  definieren wir

$$1.a = (a, *, a) \quad .$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist ein Pfeil, d.h. es gilt  $(a, *, a) \in P$ , da  $\leq$  reflexiv ist. Die Gesetze (2) und (4) gelten, da es zu jedem Anfang und Ende höchstens einen Pfeil gibt. Folglich ist  $(X, \{*\}, P, ;, 1)$  eine Kategorie. Wir bezeichnen sie mit  $Pr.(X, \leq)$ . □

**Beispiel** Sind  $X$  eine Menge,  $+$  eine assoziative Verknüpfung auf  $X$  und  $0$  eine Identität von  $+$ , dann heißt  $(X, +, 0)$  ein *Monoid*. Sind  $(X, +, 0)$  und  $(Y, +, 0)$  Monoide, und ist  $\varphi$  eine Funktion aus  $X \rightarrow Y$ , so daß für alle  $v, w \in X$  gilt

$$\begin{aligned} \varphi.0 &= 0 \\ \varphi.(v + w) &= \varphi.v + \varphi.w \quad , \end{aligned}$$

dann heißt  $\varphi$  ein *Monoidhomomorphismus*.

Gegeben sei eine Menge  $O$  von Monoiden. Wir überladen die Symbole  $+$  und  $0$  und verwenden sie für alle Monoide aus  $O$ . Wir definieren eine Kategorie, deren Objekte die Elemente aus  $O$ —also Monoide—sind. Sei  $M$  die Menge aller Monoidhomomorphismen zwischen Monoiden aus  $O$ . Als Pfeile wählen wir diese Monoidhomomorphismen zusammen mit den Monoiden, von und nach denen sie abbilden. Formal wird die Menge  $P$  der Pfeile definiert durch

$$\begin{aligned} P = \{ & R, S \in O, \varphi \in M : \\ & (\varphi \text{ ist ein Monoidhomomorphismus von } R \text{ nach } S) : \\ & (R, \varphi, S) \} \quad . \end{aligned}$$

Die Komposition „;“ definieren wir wie folgt: Für alle Pfeile  $(R, \varphi, S) \in P$  und  $(S, \psi, T) \in P$  definieren wir

$$(R, \varphi, S); (S, \psi, T) = (R, \psi \circ \varphi, T) \quad .$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist ein Pfeil, d.h.  $(S, \psi \circ \varphi, T) \in P$  gilt, da die Funktionskomposition von Monoidhomomorphismen wieder ein Monoidhomomorphismus ist. Das Gesetz (1) folgt sofort. Das Gesetz (2) gilt, weil die Funktionskomposition  $\circ$  assoziativ ist. Die Identität 1 definieren wir wie folgt: Für alle Objekte  $(X, +, 0) \in O$  definieren wir

$$1.(X, +, 0) = ((X, +, 0), id.X, (X, +, 0)) \quad .$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist ein Pfeil, d.h. in  $P$  enthalten, da die Identitätsfunktion ein Monoidhomomorphismus ist. Das Gesetz (3) folgt sofort. Das Gesetz (4) gilt, weil die Identitätsfunktion Identität der Funktionskomposition ist. Folglich ist  $(O, M, P, ;, 1)$  eine Kategorie. Wir bezeichnen sie mit *Mon.O*.

□

## 2 Funktoren

Nun definieren wir einen zweiten Begriff aus der Kategorientheorie: „Funktork“.

**Definition** Seien  $C$  und  $D$  Kategorien. Sei  $F$  eine Funktion, welche die Objekte von  $C$  auf Objekte von  $D$  und die Pfeile von  $C$  auf Pfeile von  $D$  abbildet. Das Tripel  $(C, F, D)$  heißt ein *Funktor*, wenn die folgenden drei Gesetze gelten.

*Kommutativität von F mit  $\downarrow$  und  $\uparrow$ :* Für alle Pfeile  $g$  der Kategorie  $C$  gilt

$$F.(\downarrow g) = \downarrow F.g \wedge F.(\uparrow g) = \uparrow F.g \quad . \quad (5)$$

*Kommutativität von F mit 1:* Für alle Objekte  $a$  der Kategorie  $C$  gilt

$$F.(1.a) = 1.(F.a) \quad . \quad (6)$$

*Distributivität von F über „;“:* Für alle Pfeile  $g, h$  der Kategorie  $C$  mit  $K.(g, h)$  gilt

$$F.(g ; h) = F.g ; F.h \quad . \quad (7)$$

□

Nun betrachten wir einige Beispiele für Funktoren. Dabei greifen wir auf die Kategorien aus Abschnitt 1 zurück.

**Beispiel** Gegeben sei eine Menge  $O$  von Monoiden. Wir definieren eine Menge  $N$  von Mengen durch

$$N = \{(X, +, 0) \in O :: X\} \quad .$$

Wir definieren einen Funktor

$$(Mon.O, F, Set.N) \quad . \quad (8)$$

Für alle Monoide  $(X, +, 0) \in O$  definieren wir

$$F.(X, +, 0) = X \quad .$$

Für alle Pfeile  $((X, +, 0), \varphi, (Y, +, 0))$  von  $Mon.O$  definieren wir

$$F.((X, +, 0), \varphi, (Y, +, 0)) = (X, \varphi, Y) \quad .$$

Es bleibt zu zeigen, daß das Tripel (8) tatsächlich ein Funktor ist. Das Gesetz (5) folgt sofort aus der Definition von  $F$ . Das Gesetz (6) beweisen wir, indem wir für beliebiges  $(X, +, 0) \in O$  rechnen

$$\begin{aligned} & F.(1.(X, +, 0)) \\ = & \{\text{Definition von } 1 \text{ in } Mon.O\} \\ & F.((X, +, 0), id.X, (X, +, 0)) \\ = & \{\text{Definition von } F\} \\ & (X, id.X, X) \\ = & \{\text{Definition von } 1 \text{ in } Set.N\} \\ & 1.X \\ = & \{\text{Definition von } F\} \\ & 1.(F.(X, +, 0)) \quad . \end{aligned}$$

Schließlich bleibt noch das Gesetz (7) zu beweisen. Dazu rechnen wir für beliebige Pfeile  $((X, +, 0), \varphi, (Y, +, 0))$  und  $((Y, +, 0), \psi, (Z, +, 0))$  von  $Mon.O$

$$\begin{aligned} & F.(((X, +, 0), \varphi, (Y, +, 0)) ; ((Y, +, 0), \psi, (Z, +, 0))) \\ = & \{\text{Definition von „;“ in } Mon.O\} \\ & F.((X, +, 0), \psi \circ \varphi, (Z, +, 0)) \\ = & \{\text{Definition von } F\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (X, \psi \circ \varphi, Z) \\
= & \{ \text{Definition von „;“ in } Set.N \} \\
& (X, \varphi, Y); (Y, \psi, Z) \\
= & \{ \text{Definition von } F, \text{ zweimal} \} \\
& F.((X, +, 0), \varphi, (Y, +, 0)) ; F.((Y, +, 0), \psi, (Z, +, 0)) \quad .
\end{aligned}$$

□

**Beispiel** Gegeben seien zwei Präordnungen  $(X, \leq)$  und  $(Y, \leq)$ . Sei

$$(Pr.(X, \leq), F, Pr.(Y, \leq))$$

ein Funktor. Wir beweisen, daß die Funktion  $F$  auf  $X$  monoton ist, d.h., daß für alle  $a, b \in X$  gilt

$$a \leq b \Rightarrow F.a \leq F.b \quad .$$

Bezeichne  $PX$  die Menge der Pfeile von  $Pr.(X, \leq)$  und  $PY$  die Menge der Pfeile von  $Pr.(Y, \leq)$ . Für alle  $a, b \in X$  gilt

$$\begin{aligned}
& a \leq b \\
\equiv & \{ \text{Definition von } Pr.(X, \leq) \} \\
& (a, *, b) \in PX \\
\Rightarrow & \{ F \text{ bildet Pfeile auf Pfeile ab} \} \\
& F.(a, *, b) \in PY \\
\equiv & \{ * \text{ ist die einzige Marke von } Pr.(Y, \leq) \} \\
& (\downarrow F.(a, *, b), *, \uparrow F.(a, *, b)) \in PY \\
\equiv & \{ F \text{ kommutiert mit } \downarrow \text{ und } \uparrow \text{ (5)} \} \\
& (F.(\downarrow(a, *, b)), *, F.(\uparrow(a, *, b))) \in PY \\
\equiv & \{ \text{Definition von } \downarrow \text{ und } \uparrow \text{ (0)} \} \\
& (F.a, *, F.b) \in PY \\
\equiv & \{ \text{Definition von } Pr.(Y, \leq) \} \\
& F.a \leq F.b \quad .
\end{aligned}$$

Umgekehrt kann man zeigen, daß sich jede monotone Funktion  $\alpha \in X \rightarrow Y$  so auf Pfeile erweitern läßt, daß  $(Mon.O, \alpha, Set.N)$  ein Funktor ist.

□

**Beispiel** Sei  $O$  eine Menge von Mengen. Wir definieren eine Menge  $N$  von Monoiden durch

$$N = \{ X \in O :: (X^*, \hat{\cdot}, \varepsilon) \} \quad ,$$

wobei  $X^*$  die Menge der endlichen Sequenzen über  $X$  bezeichnet,  $\hat{\phantom{x}}$  die Konkatenation und  $\varepsilon$  die leere Sequenz. Für  $x \in X$  schreiben wir die einelementige Sequenz, die nur aus  $x$  besteht, als  $\langle x \rangle$ . Wir definieren einen Funktor

$$(Set.O, F, Mon.N) \quad . \quad (9)$$

Für alle  $X \in O$  definieren wir

$$F.X = (X^*, \hat{\phantom{x}}, \varepsilon) \quad .$$

Für alle Pfeile  $(X, \alpha, Y)$  von  $Set.O$  definieren wir

$$F.(X, \alpha, Y) = ((X^*, \hat{\phantom{x}}, \varepsilon), \alpha^*, (Y^*, \hat{\phantom{x}}, \varepsilon)) \quad ,$$

wobei  $\alpha \in X^* \rightarrow Y^*$  folgende Funktion ist: Für alle  $x \in X$  und für alle  $s, t \in X^*$  definieren wir

$$\begin{aligned} \alpha^*.\varepsilon &= \varepsilon \\ \alpha^*.\langle x \rangle &= \langle \alpha.x \rangle \\ \alpha^*.(s \hat{\phantom{x}} t) &= \alpha^*.s \hat{\phantom{x}} \alpha^*.t \quad . \end{aligned}$$

Aus dieser Definition folgt sofort, daß  $\alpha^*$  ein Monoidhomomorphismus ist. Es bleibt zu zeigen, daß das Tripel (9) tatsächlich ein Funktor ist. Das Gesetz (5) folgt sofort aus der Definition von  $F$ . Das Gesetz (6) gilt, weil für alle  $X \in O$  gilt:  $(id.X)^* = id.(X^*)$ . Das Gesetz (7) gilt, weil für alle Pfeile  $(X, \alpha, Y)$  und  $(Y, \beta, Z)$  von  $Set.O$  gilt:  $(\beta \circ \alpha)^* = \beta^* \circ \alpha^*$ .

□

### 3 Literaturhinweise

Zur Kategorientheorie gibt es viel Literatur. Zwei Standardwerke sind

Saunders Mac Lane: Categories for the Working Mathematician.  
Springer-Verlag, New York 1971

und

Horst Herrlich, George E. Strecker: Category Theory. Helder-  
mann-Verlag, Berlin 1979.

Andere Bücher sind speziell für Informatiker geschrieben, zum Beispiel

Michael Barr, Charles Wells: Category Theory for Computing  
Science. Prentice Hall 1990.