
„Perlen der Weisheit“

Die Laplace-Transformation

Andreas Günzler

23.1.2001

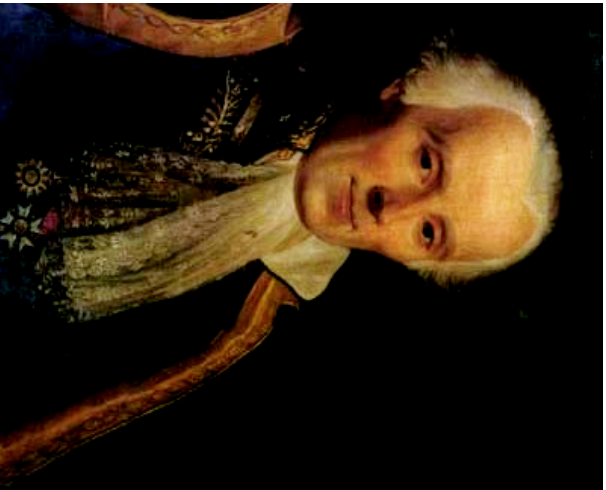
Pierre Simon Laplace (23.3.1749 – 5.3.1827)

Wissenschaftliche Arbeiten

- Astronomie („Himmelsmechanik“)
- Wahrscheinlichkeitstheorie
- Differential- und Integralrechnung
- Physik (Wärmetheorie, Elektrizitätslehre,)

Politische Aktivitäten

- 1799: Innenminister unter Napoleon
- Mitglied des französischen Senats
- 1804: Ernennung zum Grafen durch Napoleon
- 1817: Ernennung zum Marquis durch Ludwig XVIII



Definition (Laplace-Transformation):

Gegeben seien eine Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und eine komplexe Zahl $s \in \mathbb{C}$.

a) f heißt *Laplace-transformierbar an der Stelle s* , wenn gilt:

- (1) Für jedes $T > 0$ ist f über das Intervall $(0, T)$ integrierbar,
- (2) Der Grenzwert $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{(0, T)} f(t)e^{-st} dt$ existiert.

b) Ist f Laplace-transformierbar an der Stelle s , so heißt

$$\mathcal{L}[f](s) := \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{(0, T)} f(t)e^{-st} dt$$

die *Laplace-Transformierte von f an der Stelle s* .

Satz (Konvergenz):

Gegeben sei eine Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, die an einer Stelle $s_0 \in \mathbb{C}$ Laplace-transformierbar ist. Dann ist f auch Laplace-transformierbar an jeder Stelle $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > \Re(s_0)$, d.h. es existiert

$$\mathcal{L}[f](s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{(0, T)} f(t) e^{-st} dt$$

für alle $s \in H := \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > \Re(s_0)\}$.

Beispiele:

(1) Heavisidesche Sprungfunktion

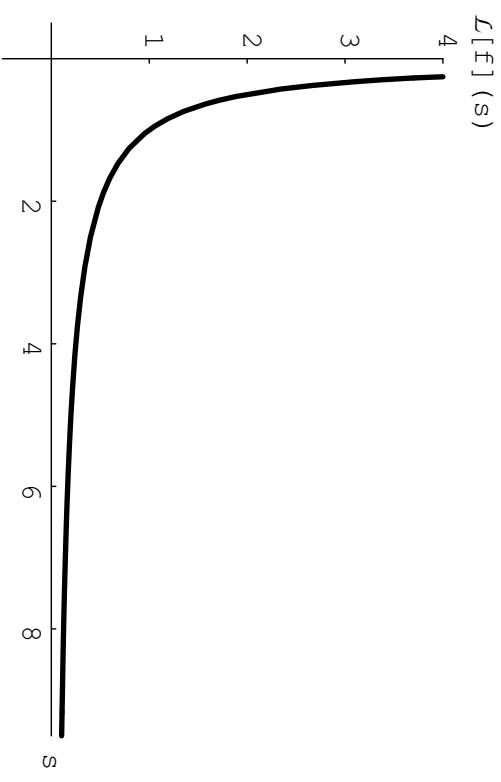
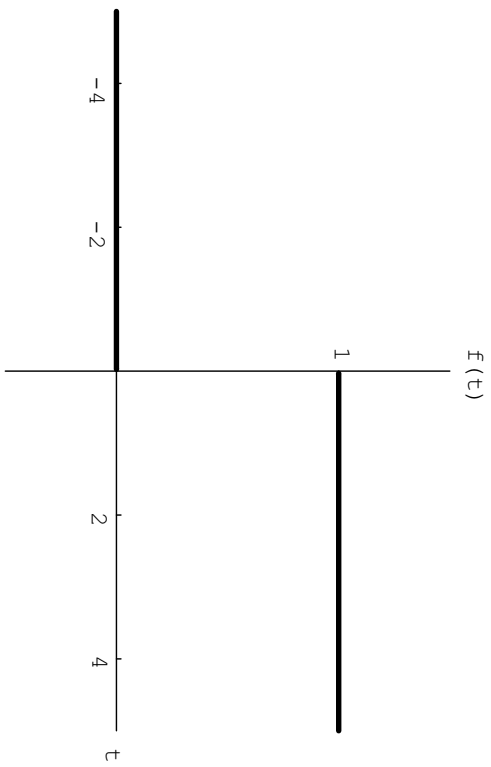
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

Für $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $T > 0$ ist

$$\int_{(0,T)} f(t)e^{-st} dt = \int_{(0,T)} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st} \right]_0^T = \frac{1}{s}(1 - e^{-sT}).$$

Der Grenzwert für $T \rightarrow \infty$ existiert genau dann, wenn $\Re(s) > 0$ gilt. In diesem Fall ist

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s}.$$



(2) Dämpfung

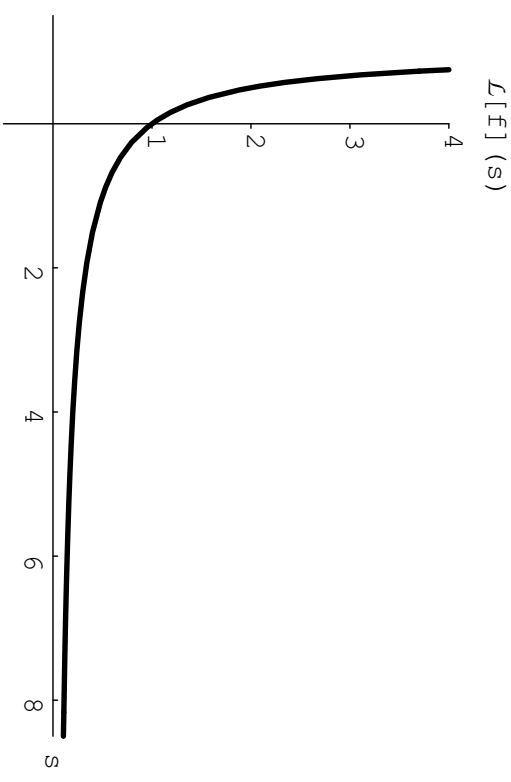
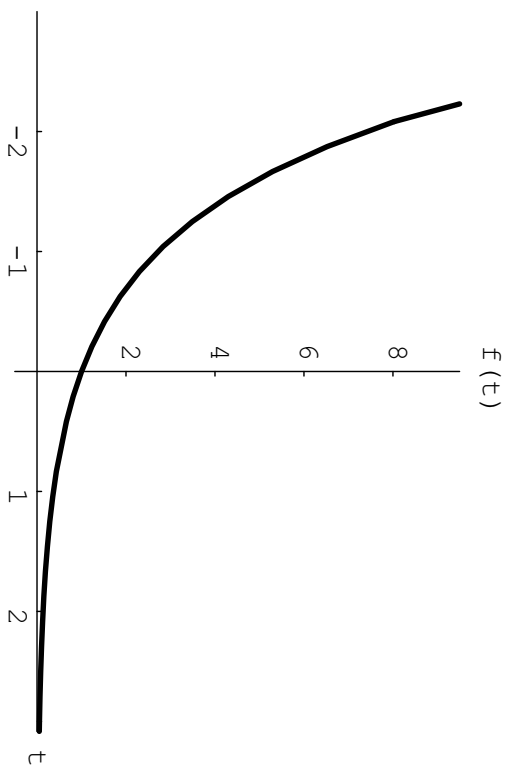
$$f(t) = e^{-at}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Für $s \in \mathbb{C} \setminus \{-a\}$ und $T > 0$ ist

$$\int_{(0,T)} f(t)e^{-st} dt = \int_{(0,T)} e^{-(s+a)t} dt = \left[\frac{e^{-(s+a)t}}{s+a} \right]_0^T = \frac{1}{s+a} (1 - e^{-(s+a)T}).$$

Der Grenzwert für $T \rightarrow \infty$ existiert genau dann, wenn $\Re(s) > -\Re(a)$ gilt. In diesem Fall ist

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s+a}.$$



(3) Sinusfunktion

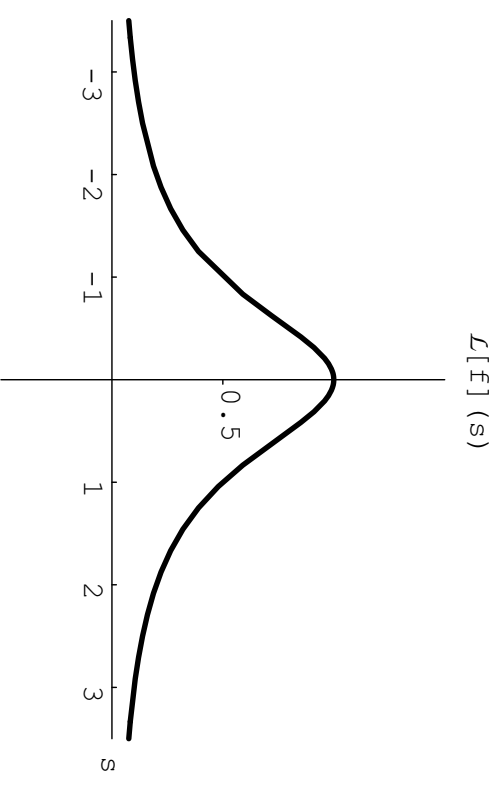
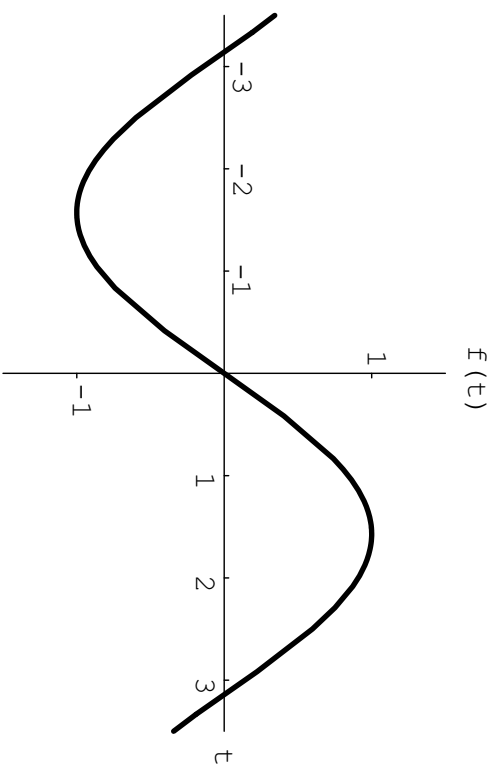
$$f(t) = \sin(at), \quad a \in \mathbb{C}.$$

Für $s \in \mathbb{C} \setminus \{\pm ia\}$ und $T > 0$ ist

$$\begin{aligned} \int_{(0,T)} f(t)e^{-st} dt &= \int_{(0,T)} e^{-st} \sin(at) dt = \left[-\frac{e^{-st} (s \sin(at) + a \cos(at))}{s^2 + a^2} \right]_0^T \\ &= \frac{a}{s^2 + a^2} - \frac{e^{-sT}}{s^2 + a^2} (s \sin(aT) + a \cos(aT)). \end{aligned}$$

Der Grenzwert für $T \rightarrow \infty$ existiert genau dann, wenn $\Re(s) > 0$ gilt. In diesem Fall ist

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$



Satz (einfache Eigenschaften):

(1) $f, g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ Laplace-transformierbar für $s \in H \subseteq \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[af + bg](s) = a\mathcal{L}[f](s) + b\mathcal{L}[g](s), \quad s \in H$$

„Additionssatz“

(2) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ Laplace-transformierbar für $s \in H \subseteq \mathbb{C}$, $a > 0$,
 $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $t \mapsto f(at)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[g](s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right), \quad s \in H$$

„Ähnlichkeitssatz“

(3) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ Laplace-transformierbar für $s \in H \subseteq \mathbb{C}$, $b > 0$,
 $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $t \mapsto \begin{cases} f(t-b) & \text{für } t \geq b \\ 0 & \text{für } t < b \end{cases}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[g](s) = e^{-bs} \mathcal{L}[f](s), \quad s \in H$$

„Verschiebungssatz“

(4) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ Laplace-transformierbar für $s \in H \subseteq \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ mit
 $\Re(a) > 0$, $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $t \mapsto e^{-at} f(t)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[g](s) = \mathcal{L}[f](s+a), \quad s \in H$$

„Dämpfungssatz“

Beispiel:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 2e^{-t} & \text{für } t > 0 \end{cases}, \quad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t) = 2e^{-t}g(t)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[f](s) = 2\mathcal{L}[g](s+1) = \frac{2}{s+1}.$$

Satz (Differentiationssatz):

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$. Ist f' an einer Stelle $x_0 > 0$ Laplace-transformierbar, so ist auch f an dieser Stelle Laplace-transformierbar. Ferner existiert dann $\lim_{t \downarrow 0} f(t)$, und es gilt

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - \lim_{t \downarrow 0} f(t)$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) = x_0$ oder $\Re(s) > x_0$.

Beispiel:

$$f(t) = \cos t$$

Mit $g(t) = \sin t$ gilt $f(t) = g'(t)$, also

$$\mathcal{L}[f](s) = s\mathcal{L}[g](s) - g(0) = \frac{s}{s^2 + 1}, \quad \Re(s) > 0.$$

Anwendung:

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Beispiel:

Gesucht ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R})$, die das folgende Anfangswertproblem löst:

$$f''(t) + f(t) = e^{-t}, \quad f(0) = f'(0) = 0$$

$$f''(t) + f(t) = e^{-t} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[f''](s) + \mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s+1}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''](s) &= s\mathcal{L}[f'](s) - f'(0) = s(s\mathcal{L}[f](s) - f(0)) - f'(0) = \\ &= s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0) = s^2\mathcal{L}[f](s) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (s^2 + 1)\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2} (e^{-t} + \sin t - \cos t)$$

Literatur:

- Gustav Doetsch: Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, 3. Auflage, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, 1976
- Otto Föllinger: Laplace- und Fourier-Transformation, 4. Auflage, Hüthig-Verlag Heidelberg, 1986
- I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik, 25. Auflage, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart und Leipzig, 1991